rd,
c
rie

Math. F.
114 Ed

Eberhard

DIE GRUNDGEBILDE

DER

EBENEN GEOMETRIE

VON

Dr. V. EBERHARD,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU KÖNIGSBERG I. P.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

ERSTER BAND.

MIT FÜNF FIGURENTAFELN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1895.

932 F

Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

1894. 1895.

Bachmann, Paul, Zahlentheorie. Versuch einer Gesammtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Haupttheilen. In sechs Theilen. Zweiter Theil: Die analytische Zahlentheorie. [XVIII u. 494 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 12.—

Bardey, Dr. **E.,** zur Formation quadratischer Gleichungen. Zweite, unveränd. Ausg. [VIII u. 390 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 3.—

——— methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Teile der Elementar-Arithmetik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. Zwanzigste Auflage. [XIV u. 330 S.] gr. 8. 1894. geh. *M.* 2.70.

——— ——— Resultate hierzu. gr. 8. [128 S.] geh. n. *M.* 1.—

Die Resultate sind nicht durch den Buchhandel zu beziehen, sondern werden nur unmittelbar von der Verlagsbuchhandlung gegen Einsendung von 1 *M.* (in Briefmarken) an beglaubigte Lehrer geliefert.

Bôcher, Maxime, Docent an der Harvard-Universität zu Cambridge, Mass., V. St. A., über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Mit einem Vorwort von Felix Klein. Mit 113 Figuren im Text. [VIII u. 258 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 8.—

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 3 Bänden. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. Zweite Auflage. [VII u. 883 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 22.—

——— ——— Dritter Band. Vom Jahre 1668 bis z. Jahre 1759. In drei Abteilungen. Erste Abteilung. Die Zeit von 1668 bis 1699. Mit 45 Figuren im Text. [251 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 6.—

Eberhard, Dr. **V.,** Professor an der Universität zu Königsberg i. P., die Grundgebilde der ebenen Geometrie. In 3 Bänden. I. Band. Mit 5 Figurentafeln. [XLVIII u. 302 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 14. –

Föppl, Dr. **A.,** Professor an der Universität Leipzig, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vectorgrössen in der Physik. Mit Figuren im Text. [XVI u. 413 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 10.—

Fort, O., und **O. Schlömilch,** Lehrbuch der analytischen Geometrie. In zwei Teilen. Erster Teil. Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort, weil. Professor an der Kgl. Techn. Hochschule zu Dresden. Sechste Auflage, besorgt von R. Heger in Dresden. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VIII u. 264 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 4.—

Ganter, Dr. **H.,** Professor an der Kantonsschule zu Aarau, und Dr. **F. Rudio,** Professor am Polytechnikum in Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium dargestellt und mit zahlreichen Übungsbeispielen versehen. 2. verb. Auflage. [VIII u. 166 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 2.40.

Grassmanns, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der

DIE GRUNDGEBILDE

DER

EBENEN GEOMETRIE

VON

Dr. V. EBERHARD,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU KÖNIGSBERG I. P.

ERSTER BAND.

MIT FÜNF FIGURENTAFELN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1895.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorrede.

Über die Grundlagen und Ziele der Raumlehre.

Unsere Erkenntnis unterscheidet vier Anschauungsformen:
den Raum, die Fläche, die Linie, den Punkt.

Als Quelle derselben erscheinen die sinnlichen Wahrnehmungen, mit welchen sie sich fortschreitend entwickeln und welche sie nach Inhalt und Umfang bestimmen.

Das erste, was der Mensch begreifen lernt, ist der Gegensatz des festen (undurchdringlichen) Körpers zum freien (durchdringlichen) Raume. — Von Anbeginn des Lebens befindet sich der menschliche Körper in ununterbrochener gleichzeitiger Fühlung sowohl mit andern festen Körpern als mit dem freien Aufsenraume. Die dadurch an verschiedenen Flächen erzeugten verschiedenen Druck- bzw. Wärmeempfindungen und deren bei jeder körperlichen Bewegung erfolgende örtliche Verlegung mufs jene Distinktion hervorrufen und zunächst die Ausdehnung des eigenen Körpers bestimmen lehren. Mit steigender Gebrauchsfähigkeit der Gliedmafsen und Sinnesorgane bei steter gegenseitiger Ergänzung und Kontrolle erweitert sich dieser Ansatz zu der Vorstellung des Raumes. Wir erfahren, dafs der eigene und jeder andere feste Körper sich unverändert im Raume bewegt, und gewöhnen uns, sie als quantitative Teile eines und desselben alle umfassenden Ganzen anzusehen.

Die Raumvorstellung haftet ursprünglich noch an dem Körper und seiner wahrnehmbaren Umgebung, hat also den Charakter der Endlichkeit. Erst die Abstraktion befreit sie von diesen Schranken.

Die sinnliche Wahrnehmung erkennt und bestimmt den Körper durch seine Begrenzung. Sie konstatiert drei Abstufungen derselben, welche ihren verschiedenen Organen an verschiedenen Charakteren kenntlich werden.

Der Gefühlssinn im Allgemeinen empfindet den Widerstand eines festen Körpers an einer Fläche als Druck, an einer Kante als Schärfe, an einer Ecke als Stich.

Dem ausgebildeten Gefühl, dem Tastsinn der Hand oder des Fufses, dienen neben diesen drei Empfindungsformen zum Zweck der Grenzbestimmung eines Körpers die durch den Kontakt mit letzterem gegebenen Bedingungen der eigenen Beweglichkeit. Dabei ist es von wesentlicher Bedeutung, in welchem Abhängigkeitsverhältnis von dem übrigen Körper das prüfende Organ aufgefafst wird.

Die Spitze des sich in seinen Gelenken bewegenden Fingers wird bei gleichzeitiger Ruhe der Hand in ihrer Bewegungsfreiheit durch den Eindruck der Fläche garnicht, durch denjenigen der Kante teilweise, nämlich in einer Richtung, durch den der Ecke vollkommen gebunden. Empfindung und Bewegung erfahren beim Passieren der gemeinsamen Grenze zweier Flächen wie zweier Kanten accute und charakteristische Störungen.

Im Gegensatz hierzu findet die nur den Funktionen ihres Gelenkes überlassene Hand bei unveränderter Fühlung mit dem Körper in der Fläche eine jede Bewegung hemmende Stütze, während sie durch die Kante die Fähigkeit einer einaxigen Rotation, durch die Ecke die Freiheit jeder beliebigen Gelenkbewegung erhält.

Wird sie aber als Endglied des Armes vorwiegend durch diesen dirigiert, so sind für die Unterscheidungen der drei Grenzformen wieder die vorherigen Merkmale mafsgebend.

Der Fernsinn des Auges stützt seine Kritik des Körpers ebenfalls auf zwei Momente, die Lichtempfindung und die Beweglichkeit des Augapfels. Der mitten auf einer Fläche haftende Blick kann sich nach jeder beliebigen Richtung wenden, ohne vorerst den Eindruck der die Fläche kennzeichnenden Farbe zu verlieren. Dieses Verhältnis bleibt bestehen, bis er zu den Grenzen der Fläche gelangt. Hier wird seine freie Beweglichkeit durch die Wahrnehmung beschränkt, dafs er unmittelbar sowohl auf die ursprüngliche als auf eine zweite Fläche sich richten kann. Die Erhaltung dieses Eindruckes bindet die Einstellung des Augapfels an den Lauf der beide Flächen scheidenden Linie und schreibt ihm eine in jedem Zeitpunkt bestimmte Bewegung vor. Dieselbe wird erst dadurch gehemmt, dafs der Blick zu einer Stelle gelangt, von der aus er unmittelbar in wenigstens drei Flächen eintreten kann. Die Wahrung dieses Eindruckes setzt aller Bewegung ein Ziel, sie festigt den Blick an einen Punkt, bindet ihn an eine Richtung.

Die hier in allgemeinen Zügen geschilderten sich auf die Kritik der Sinne gründenden Abstraktionsvorgänge werden wesentlich dadurch unterstützt, dafs die Natur unzählige Körper aufweist, welche infolge

des relativen Zurücktretens einer, zweier oder aller drei Ausdehnungen die Operationen der beobachtenden Organe einseitig beeinflussen. So erweckt das Blatt eines Baumes mehr den Eindruck einer Fläche, ein Halm, ein Haar mehr den einer Linie, ein Tropfen, ein Sandkorn mehr den eines Punktes. In gröberer Form bieten schon die verschiedenen willkürlichen Gestaltungen unserer Hand diese Wahrnehmungen dar. Bei der geballten Faust überwiegt die Vorstellung des Körpers, bei der flachen Hand diejenige einer durch eine Linie begrenzten Fläche, beim ausgestreckten Finger die einer in einem Punkt endenden Linie. Für das beobachtende Auge wird mit wachsender Distanz des Objektes der ungleichmäfsige Eindruck seiner verschiedenen Ausdehnungen noch verschärft.

Die Erfahrung läfst zugleich mit den vier Grundvorstellungen auch deren fundamentale Beziehungen zu einander erkennen.

Der Raum umfafst alle Flächen; zwei Flächen bestimmen ein und dieselbe Linie; drei Flächen, oder eine Fläche und eine Linie, oder zwei Linien fixieren einen Punkt. Umgekehrt bewegt sich der Punkt auf einer Linie, eine Linie auf einer Fläche, eine Fläche im Raume.

Die Punkte des Raumes liegen zu zwei Seiten einer Fläche, die Punkte einer Fläche zu zwei Seiten einer Linie, die Punkte einer Linie zu zwei Seiten eines Punktes.

Die vier Vorstellungen gruppieren sich ihrem Wesen nach in zwei scharf gesonderte Paare:

den Raum und den Punkt, die Fläche und die Linie.

Der Raum repräsentiert die weiteste, jede andere enthaltende und von jeder ausgeschlossene, — der Punkt die engste, jede andere ausschliefsende und in jeder enthaltene Vorstellung. Die äufsersten Grenzen der Anschauung bestimmend, erweisen sie sich von ihrer jeweiligen Erzeugungsweise unabhängig als unveränderliche absolute Anschauungseinheiten.

Im Gegensatz hierzu zeigen die zwischen beiden vermittelnden Allgemeinvorstellungen der Fläche und der Linie von Fall zu Fall wechselnde Eindrücke. Es tritt als Kennzeichen des einzelnen Gebildes seine Gestalt hervor.

Die Natur entfaltet in ihren Schöpfungen einen aufserordentlichen Reichtum an Formen sowohl von Flächen wie von Linien. Dieselben lassen nicht nur im einzelnen Unterschiede und Ähnlichkeiten unvermittelt hervortreten, sondern auch im Ganzen eine Einteilung in zwei prinzipiell verschiedene Kategorieen erkennen. Es erscheinen

uns nämlich die einen — vorwiegend anorganische Gebilde — als zufällig, unbestimmt, ein deutliches Erinnerungsbild nicht hinterlassend, die anderen — vornehmlich organischen Ursprungs — als zweckmäfsig, beabsichtigt, der Anschauung sich klar einprägend. Die verschiedenen Typen dieser zeigen weiter ungleiche Grade der Anschaulichkeit, Vertreter desselben Typus endlich gröfsere oder geringere Formvollendung.

Eine Analyse der Kritik, welche die Anschauung bei der gestaltlichen Aufnahme eines Körpers ausübt, ergiebt als ersten Akt die Unterscheidung sämtlicher die Allgemeinvorstellung der Fläche störenden Besonderheiten seiner Begrenzung, also die Bestimmung ihrer etwaigen Kanten und Ecken, wie deren gegenseitiger Beziehungen. Es wird mit Bezug auf jede Kante konstatiert, ob sie für sich einen geschlossenen Zug bildet oder in zwei Ecken ausläuft, in Hinsicht auf jede Ecke, ob und welche Kanten in ihr zusammenstofsen, sowie in welchem der beiden durch eine geschlossene Linie berandeten Stücke der Oberfläche sie gelegen ist.

Die Distinktionsfähigkeit der Anschauung bleibt indessen bei der Fixierung und Beschreibung dieser Diskontinuitäten nicht stehen. Auch da, wo eine übergrofse Anzahl solcher die vollständige Bestimmung undurchführbar macht, oder wo Unstetigkeiten überhaupt nicht vorhanden, entdeckt sie gewisse die Gestalt des Gebildes im allgemeinen charakterisierende Eigentümlichkeiten. Die notwendigen und hinreichenden Mittel hierfür findet sie in den der Erfahrung entlehnten Grundformen beider Gattungsvorstellungen:

der ebenen Fläche und der geraden Linie.

Die Abstraktionen der Ebene und der Geraden haben gleichmäfsig ihren Ursprung in den Gesichts- und den Gefühlswahrnehmungen bestimmter konkreter Formen, welche uns die Natur überall und unaufhörlich als dem Ganzen das Gepräge gebend vorführt.

Das Auge empfängt den Eindruck der Ebene ununterbrochen im Anblick der allgemein ebenen Erdoberfläche, aus der alle Gestalten herauswachsen und gegen die sie sich abheben, in höherem Mafse durch die scheinbar vollkommene Ebenheit einer Wasser- oder Eisfläche; es sieht das Bild einer Geraden bereits in Halmen von Gräsern, Stengeln von Blumen, Stämmen von Bäumen, wie in unserer eigenen aufrechten Haltung, ausgeprägter in den Furchen des Wassers, den Fäden des Regens, den Strahlen der Sonne.

Dem Gefühl dient die Sicherheit, Stetigkeit und Leichtigkeit unserer Fortbewegung als Kennzeichen eines normalen oder ebenen,

jede Störung hierin als Merkmal eines anormalen oder unebenen Bodens; ihm ist das durch einen einzigen konstanten Willensakt veranlafste einfache oder träge Vorwärtsschreiten alleiniges Kriterium eines geraden, jede Störung der Trägheit durch einen neuen Impuls die Begleitserscheinung eines ungeraden Weges.

Die Spur, welche wir ein festes Ziel im Auge auf dem Erdboden zurücklassen, giebt das konkrete Bild der idealen Geraden, die unser Auge mit dem Ziele verbindet.

Diese allgegenwärtige graduell verschiedene konkrete Vertretung der beiden Vorstellungen und ihre unausgesetzte Einwirkung auf unsere Sinne verleiht ihnen eine solche Präzision und universelle Geltung, dafs wir sie als uns angeborene Anschauungsformen zu betrachten geneigt sind.

Aber nicht nur die Grundgebilde selbst, auch ihre Gesetze lesen wir unmittelbar den Erscheinungen ab.

Der Bau der Organismen entwickelt sich unter dem steten gleichmäfsigen Einflufs der Schwere. Ihre aufrechte oder vertikale Stellung zur Erdebene und die horizontale Symmetrie ihrer Teile sind notwendige Konsequenzen. Wir lernen an unserem eigenen Körper wie an anderen, dafs überall die gerade zur Erde normale Haltung die Bedingung des Gleichgewichtes ist, und sehen in dem Nebeneinander solcher zur unveränderten Erdebene gleicher Richtungen das erste Beispiel des Parallelismus. Wir beobachten in jedem Standort in der abweichenden Richtung unseres aufrechten Körpers zu dem gerade vor uns liegenden Wege oder der entsprechenden des Beines zum Fufse den rechten Winkel und gelangen durch die Fähigkeit infolge eigener Umdrehung von demselben Orte aus verschiedene gerade Wege einzuschlagen, zum Allgemeinbegriff des Richtungsunterschiedes.

Tausend andere Wahrnehmungen, der in die Höhe strebende Wuchs der Bäume, die Ausbreitung ihrer Äste um den Stamm, der parallele Fall des Regens etc. etc. unterstützen und verschärfen unsere abstrahierende Thätigkeit.

Die Allmacht der Schwere zwingt uns, die Bauart der Natur nachzuahmen und dadurch unseren Gebäuden möglichste Stabilität zu geben. Wir bauen auf ebenem Boden, indem wir senkrecht zu ihm in gleicher Höhe Pfeiler und Wände aufführen und auf diesen horizontale Decken bilden. Dabei zeigt es sich, dafs gerade Balken auf zwei, ebene Flächen auf drei Unterstützungspunkten ruhen, und weiter, dafs zwei Ebenen sich in einer Geraden, drei sich in einer Ecke treffen.

Wieder erwächst unser Wissen lediglich aus der Logik der Thatsachen, welche die schon bekannten allgemeinen Beziehungen zwischen den Vorstellungen der Fläche, der Linie und des Punktes für diejenigen der Ebene, der Geraden und des Punktes dahin spezialisiert, dafs zwei Ebenen sich in einer einzigen Geraden, eine Ebene und eine Gerade oder drei Ebenen oder zwei Geraden einer Ebene sich in einem einzigen Punkt schneiden, und welche die Ebene als Fläche durch eine Gerade und einen Punkt, oder durch zwei Geraden aus einem Punkt oder durch irgend drei Punkte — die Gerade als Linie durch irgend zwei Ebenen oder zwei Punkte bestimmen.

Wir werden auf rein empirischem Wege dazu geführt, in diesen Abstraktionen ursprüngliche und bedingungslose Anschauungsgesetze zu sehen, die schon an sich und nur durch sich Beweiskraft haben.

Die auffällige Erscheinung, dafs die Natur andere Flächen- und Linienformen von derselben Anschaulichkeit und Bestimmtheit wie die Ebene und die Gerade nicht darbietet, giebt allein noch kein Recht, die Existenz solcher überhaupt zu verneinen. Denn da die Gestaltungsfähigkeit der Materie durch die Gravitation reguliert und gehemmt wird, ist es a priori denkbar, dafs unsere von den mechanischen Fesseln befreite Einbildungskraft in der Erzeugung von Urformen über die Leistungen der Natur hinausreicht.

Diese Erwartung erweist sich jedoch als unerfüllbar. Sinnlichen Ursprunges ist das Anschauungsvermögen auch an die sinnlichen Grenzen gebunden. Es empfängt in der Ebene und der Geraden seine einzigen originalen Formen und sucht alle anderen durch Reduktion auf diese sich möglichst zu verdeutlichen.

Jede bestimmte Vorstellung einer Fläche repräsentiert eine bestimmte Zweiteilung des Raumes. Sie wird daher charakterisiert:

1) durch die Begrenzungsformen der Teilgebiete, also durch die beiden Seiten der Fläche, und zwar in totaler wie in partieller Ausdehnung;
2) durch das Gröfsenverhältnis des einzelnen Teilgebietes zum ganzen Raume.

Die vollständige unbegrenzte Ebene gewährt der Anschauung auf beiden Seiten vollkommen identische Bilder und bedingt schon dadurch eine Teilung des Raumes in zwei nach Ausdehnung und Begrenzung unterschiedslose absolute Hälften. Zufolge der ihr mit dem Raume gemeinsamen Eigenschaft, innerhalb ihres Bereiches jedem Bestandteil unter Wahrung seiner Gestalt volle Bewegungs-

freiheit zu gestatten, gilt die Gleichförmigkeit der geschiedenen Gebiete auch an jeder begrenzten ebenen Fläche.

Isoliert tritt die Kongruenz der beiden Seiten einer Fläche wie die volle Beweglichkeit fest begrenzter Formen in ihr auch bei anderen Flächen auf, so die erstere bei Wellen-, die letztere bei Kugelflächen; gepaart aber einzig und allein in dem Bilde der Ebene.

Alle Punkte der Ebene nehmen im Raume ein und dieselbe zu seinen beiden Hälften gleiche Stellung ein. In jedem existiert eine einzige zur Ebene vertikale Gerade und auf dieser in jedem beliebigen Abstande in jedem Teilraum genau ein Punkt. Umgekehrt geht durch irgend einen auf der einen oder der anderen Seite der Ebene fixierten Punkt eine einzige zu ihr lotrechte Gerade, deren durch Punkt und Ebene begrenzter Teil die Höhe jenes über dieser mifst. Die Ortsbestimmungen in beiden Raumhälften erfolgen somit von derselben indifferenten Basis aus nach den nämlichen eindeutigen Operationen in gleichem Umfange.

In völlig analoger Weise wie der Raum durch die Ebene wird diese durch die gerade Linie zerschnitten. In jedem Punkte letzterer giebt es wiederum genau eine zu ihr normale Gerade und auf derselben in jedem beliebigen Abstande in jeder Halbebene genau einen Punkt. Umgekehrt geht durch irgend einen Punkt einer Halbebene eine einzige zur Geraden senkrechte andere, deren zwischen Punkt und Gerader liegende Teilstrecke die Distanz jenes von dieser angiebt.

Endlich wird die Gerade durch jeden ihrer Punkte in zwei kongruente Halbstrahlen geteilt, so dafs in beliebig gegebener Entfernung vom Teilpunkte jeder Halbstrahl genau einen Punkt enthält.

Die vorbeschriebene Teilung des Raumes durch eine Ebene, der Ebene durch eine Gerade, der Geraden durch einen Punkt involviert die eindeutige Unterscheidung der Punkte des Raumes durch die Angabe ihrer sogenannten drei Coordinaten.

Zwei Ebenen im Raume, zwei Geraden in der Ebene sind nur durch ihre diskrete Lage unterschieden. Erstere werden durch Rotation um ihre einzige Schnittgerade, letztere durch Drehung um ihren einzigen Schnittpunkt zur Deckung gebracht. Im Gegensatz zu anderen Flächen und Linien besitzt eine Ebene und eine Gerade nur kongruente, nicht ähnliche (quantitativ verschiedene) Abbilder.

Es sind die einzigen Vertreter ihrer respektiven Allgemeinvorstellungen, welche in ihrer Vollständigkeit mit den Anschauungsformen des Raumes und des Punktes in der Grundthatsache über-

einstimmen, von ihrer jeweiligen Erzeugungsweise unabhängige absolute Anschauungseinheiten zu repräsentieren.

Das Vermögen, die Gestalt eines Körpers geistig festzuhalten und zu reproduzieren, entspringt aus der sinnlichen Wahrnehmung, dafs stets an mehreren getrennten Stellen der stetig gedachten Oberfläche konkrete Ebenen auf den Körper gelegt werden können, welche einen bestimmten, wenn auch noch so kleinen Teil seiner Begrenzung bedecken. Die dadurch markierte ungleichmäfsige Teilung des Raumes um eine solche Stelle, die gleichförmige in zwei kongruente Hälften durch die Ebene, die ungleichförmige nur einer dieser durch die Fläche, bietet den ersten Anhalt zur formalen Vergegenwärtigung eines gewissen Gebietes letzterer.

Die einfachste oder die Normalform der kontinuierlichen Oberfläche eines endlichen Körpers entsteht, wenn jede Stelle derselben den Unterstützungspunkt für eine Grenzebene in vorerwähntem Sinne abgiebt. Da alsdann eine beliebige Anzahl dieser ein Polyeder bestimmt, welches den Körper einschliefst und sich ihm mit wachsender Anzahl der Ebenen mehr und mehr nähert, erscheint derselbe als ein convexes Polyeder mit unendlich vielen unendlich kleinen Seitenflächen.

Analog stellt sich der Umrifs oder die Linie, welche eine beliebige Ebene aus seiner Oberfläche ausschneidet, als Grenzfall eines konvexen geradlinigen Polygones dar.

Die Anschauung abstrahiert aus diesen Annäherungen der einfachsten durch Ebenen und Geraden begrenzten Gebilde an gewisse stetige Flächen und Linien den Grundsatz, dafs erstere in ihren kleinsten Teilen als eben, letztere in denselben als gerade anzusehen seien, oder dafs die einen in jedem Punkte eine berührende Ebene, die anderen in jedem Punkte eine berührende Gerade besitzen.

Es wird die Oberfläche eines endlichen Körpers, falls sie kontinuierlich ist, an mindestens vier diskreten Stellen von ihn einschliefsenden Grenzebenen berührt. Um diese Stellen werden sich Gebiete abgrenzen lassen, für deren Punkte die allgemeine einseitige Lage der Grenzebene zu den umgebenden Teilen der Fläche gewahrt bleibt, während unter der Annahme eines nicht überall konvexen Körpers an den Grenzen jener Gebiete Stellen existieren müssen, in welchen neue Berührungsebenen des bisherigen Sinnes unmöglich, neue Kriterien für die Flächenform erforderlich werden.

Um die Gestaltsverhältnisse einer ganz beliebigen (geschlossenen) Oberfläche zu beschreiben, bedient man sich am zweckmäfsigsten einer um eine feste Gerade rotierenden Ebene, indem man die in

dieser sich stetig folgenden Querschnitte der Fläche gestaltlich auffafst und ihre allmählichen Veränderungen beobachtet.

Die allgemeinste Form eines solchen Querschnittes wird durch ein System von m verschiedenen endlichen Flächen dargestellt, deren jede von einer einzigen oder von mehreren geschlossenen Kurven begrenzt sein kann.

Man wird zunächst den Lauf einer solchen Grenzlinie dadurch bestimmen, dafs man von einem Kurvenpunkte mit äufserer einseitiger Tangente aus — es giebt mindestens drei diskrete Punkte derart — durch stetige Fortbewegung in der Kurve zu allen Punkten analogen Charakters übergeht. Gelangt man ohne Störung der einseitigen Lage der Tangente zur Kurve wieder zum Ausgangspunkte zurück, so wird man die Linie und damit auch die sich auf sie stützende Wandung der Fläche in der Umgebung des Querschnittes als konvex erkennen. Führt aber der Lauf der Kurve zu einem Punkte, in welchem die Kurve von der einen auf die andere Seite der begleitenden Tangente tritt, so geht diese in einer Wendelage, ihren Drehungssinn ändernd, aus einer äufseren in eine innere Kurventangente über, um solange als solche zu verharren, bis mit ihrem Durchgange durch eine zweite Wendelage das frühere Verhältnis wieder hergestellt und so die ungestörte Rückkehr von Punkt und Tangente in die Ausgangsstellung ermöglicht wird. Es erscheint daher jede einfach geschlossene (sich selbst nicht durchsetzende) Linie aus zwei Systemen gleich vieler diskreter Kurvenbögen gebildet, von denen die einen die äufseren, die anderen die inneren Tangenten enthalten, und die sich abwechselnd folgend in der doppelten Zahl indifferenter Tangenten zusammenhängen.

So kann die Gestalt jeder einzelnen Schnittkurve und, da benachbarte Ebenen isomorphe Schnitte ergeben, auch diejenige der Fläche in der Umgebung der Ebene veranschaulicht werden.

Für die Lage der m Schnittflächen zu einander sind wegen ihres gegenseitigen Ausschlusses wie der möglichen Coexistenz mehrerer diskreten Aufsengebiete bei derselben Fläche vor allem die Bestimmungen mafsgebend, in welchem ihrer Aufsengebiete jede einzelne Fläche jede andere enthält, während gegenüber mehreren dem nämlichen Aufsengebiet angehörigen Flächen mit exzentrischen äufsersten Umrissen das System ihrer gemeinschaftlichen Tangenten noch eine weitere Lokalisierung gestattet.

Wenn nach vollendeter Beschreibung des Querschnittes dessen Ebene stetig variiert wird, können folgende wesentliche Änderungen in dem Zusammenhange der Schnittflächen eintreten:

1) Es vereinigen sich zwei getrennte Grenzkurven derselben bzw. verschiedener Schnittflächen, oder es löst sich umgekehrt eine einzige Grenzkurve in zwei getrennte Kurven einer und derselben bzw. verschiedener Flächen auf;
2) Es zieht sich eine Grenzkurve auf einen Punkt zusammen oder sie entwickelt sich umgekehrt aus einem solchen, d. h. es geht eine m-fach berandete Schnittfläche in eine $(m-1)$-fach berandete über oder sie entsteht aus einer solchen.

Im ersten Falle schneidet die Ebene eine Kurve mit einem reellen Doppelpunkt, im zweiten eine solche mit einem isolierten Berührungspunkte aus.

Die Wahl der Axe des Ebenenbüschels aufserhalb des als endlich angenommenen Körpers ermöglicht es, seine Beschreibung mit einer Lage der Ebene zu beginnen und zu beschliefsen, in welcher der Querschnitt durch einen einzigen Punkt dargestellt wird. Indem man während des Überganges der rotierenden Ebene aus der einen in die andere dieser Grenzlagen in der vorbeschriebenen Weise die charakteristischen Veränderungen ihres Querschnittes verfolgt, gelangt man zu derjenigen Klarheit der Vorstellung, welche unserer Anschauung überhaupt erreichbar ist.

Die Bemerkung, dafs jeder durch einen Punkt der Fläche gelegte ebene Querschnitt in ersterem auch eine Tangente besitzt, und dafs eine in der Verbindungsebene zweier solcher Tangenten durch deren Schnittpunkt gezogene Gerade selbst wieder Tangente der Fläche ist, führt zu der Erkenntnis, dafs eine stetige Fläche in jedem Punkte eine Berührungsebene besitzt, also in ihren kleinsten Teilen als eben anzusehen ist. Je nachdem dabei die Fläche sich nur auf einer oder auf beiden Seiten der Ebene ausbreitet, hat man in letzterer einen isolierten Berührungspunkt oder eine Schnittkurve mit Doppelpunkt.

Es erfahren durch die letzten Ausführungen die Allgemeinvorstellungen der Fläche und der ebenen Kurve eine grundsätzliche Ergänzung, insofern ihren Auffassungen als zwei- und einfach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeiten die anderen als gleichmächtige Ebenen- und Geradenkontinuen gleichberechtigt gegenübertreten.

Auch hinsichtlich der Linien doppelter Krümmung dient deren angenäherte Darstellung durch ihnen eingeschriebene geradlinige Polygone dazu, ein klareres Bild von dem Verlaufe einer solchen Kurve zu gewinnen. Es geht nämlich, wenn $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, ... die aufeinander folgenden Ecken des der Raumkurve einbeschriebenen Polygones bezeichnen, bei fortgesetzter Annäherung einer beweglichen

Ecke $\mathfrak{p}_2$ an die fest gedachte $\mathfrak{p}_1$ die beide verbindende Sehne in die Tangente t, bei darauf erfolgender analoger Annäherung der nächsten Ecke $\mathfrak{p}_3$ an den Berührungspunkt $\mathfrak{p}_1$ die Ebene $[t, \mathfrak{p}_3]$ in die Schmiegungsebene τ des Punktes $\mathfrak{p}_1$ über. Durchläuft letzterer die Kurve, so beschreiben die ihn begleitende Gerade und Ebene je eine einfach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit, in welcher der Übergang von Element zu Element sich durch eine unendlich kleine Drehung vollzieht. Soweit der Sinn dieser Drehung in dem einen wie in dem andern Continuum konstant bleibt, verfolgt der Punkt einen uniformen Kurvenbogen; tritt dagegen in einem Punkte für die Tangente oder für die Schmiegungsebene oder für beide ein stationärer Zustand und damit ein Wechsel des Drehungssinnes ein, so findet daselbst eine formale Unstetigkeit der Kurve statt.

Die allgemeine Methode, welche unsere Anschauung nach alledem bei der Gestaltsaufnahme eines Raumgebildes einschlägt, besteht darin, dafs sie seine Begrenzung zunächst in ein System diskreter für sich überall einförmiger continuierlicher Gebiete, in Elementarteile zerlegt. Für eine stetige Fläche kommen hierbei gemäfs des doppelten Charakters ihres allgemeinen Kontaktes mit einer Ebene zwei Formen des Elementarteiles in Betracht, das überall convexe oder concave und das allortig sattelförmige Flächenstück, für die ebene und die Raumkurve aber nur der einfach gewundene gleichmäfsig gerichtete Kurvenbogen. Gelingt es weiter, die Grenzen dieser Elementargebiete zu bestimmen und gegen einander zu lokalisieren, wie die ihnen eigentümlichen Berührungscharaktere festzustellen, so ist damit der allgemeine Umrifs des Gebildes vollkommen und unzweideutig definiert.

Es entsteht wieder die Frage, ob die Anschauung mit der Beschreibung der unmittelbar oder mittelbar hervortretenden formalen Diskontinuitäten eines Gebildes ihre Leistungsfähigkeit erschöpft hat oder ob sie ihre Kritik auch auf die durchweg setigen Elementarteile eines solchen auszudehnen imstande ist.

Ein in der Ebene zwei feste Punkte verbindender überall stetiger und convexer Kurvenbogen kann in beliebig viele allomorphe Elementarbögen umgeformt werden. Man hat — möglichst allgemein zu verfahren — nur in irgend zwei Punkten des gegebenen Bogens die Tangenten zu ziehen, den sie verbindenden Kurvenbogen durch einen andern zu ersetzen, der gleichfalls elementar und convex in dieselben zwei Tangenten ausläuft, und diesen Prozefs beliebig oft zu wiederholen.

Die Möglichkeit der Unterscheidung zweier so erhaltener Elementarbögen zwischen den beiden festen Punkten beruht einzig und allein auf einem Vergleiche der von ihnen und der Verbindungsgeraden letzterer eingeschlossenen Flächen, welche ein bestimmtes gemeinschaftliches Deckungsgebiet und eine Anzahl diskreter in wechselnder Reihenfolge über dasselbe hinausragender Bestandteile erkennen lassen. Paarweise vereinigt eine durch bestimmte Diskontinuitäten ausgezeichnete geschlossene Linie darstellend, zeigt der einzelne Elementarbogen keinen näher angebbaren Charakter.

Die Umformungen eines doppelt gekrümmten Elementarbogens kann man auf diejenigen des ebenen leicht dadurch zurückführen, dafs man einen zwischen zwei beliebigen Punkten liegenden Teil desselben mit seinen Endtangenten vertikal auf zwei Ebenen projeziert, die entstehenden Projektionen in bekannter Weise durch andere Elementarbögen ersetzt und mittelst der in ihnen senkrecht zu den Ebenen stehenden Cylinderflächen in deren Durchschnitt einen dem ursprünglichen Kurvenbogen sich passend einfügenden neuen Elementarteil bestimmt.

Schwieriger sind die Gestaltsveränderungen einer Elementarfläche gegebener Begrenzung zu übersehen. Um sie wenigstens für den Fall convexer Flächen zu veranschaulichen, die Methode bleibt auch für die sattelförmigen anwendbar, schneide man durch eine beliebige Ebene ein Segment der Fläche ab und denke sich längs der ebenen Grenzkurve desselben die Tangentialebenen konstruiert. Eine um eine feste Gerade sich drehende Ebene wird dann das Segment in einem sich stetig verändernden elementaren Kurvenbogen mit bestimmten Endtangenten schneiden. Indem man nach einem einheitlichen Prinzip zwischen das jedesmalige Tangentenpaar einen neuen Elementarbogen einschaltet, wird man zu einem neuen den abgeschnittenen völlig ersetzenden elementaren Flächenteil gelangen.

Aus vorstehenden Betrachtungen folgt, dafs ein Elementargebilde durch seine Begrenzung und den konstanten Berührungscharakter durchaus nicht bestimmt ist, vielmehr eine unendliche Mannigfaltigkeit zwar unterschiedener aber nicht näher charakterisierbarer Formen zuläfst. Man wird daher die zuletzt gestellte Frage präciser, wie folgt, zu fassen haben:

Besitzt die Anschauung allgemeine Kriterien, um ein vorliegendes Elementargebilde entweder als allgemeines (zufälliges) oder als besonderes (gesetzmäfsiges) zu erkennen?

Es ist die Aufgabe der Anschauungswissenschaft, diese

Kriterien vollständig zu ermitteln und auf denselben als der einzigen naturgemäfsen Grundlage eine Beschreibung der gesetzmäfsigen Raumvorstellungen systematisch aufzubauen.

Die Auffassung der Flächen und Linien als Örter eines beweglichen Punktes leitete schon früh dazu, gesetzmäfsige Formen derselben dadurch zu erzeugen, dafs man zwischen einer Anzahl fester Raumgebilde und einem veränderlichen Punkte eine im allgemeinen nicht erfüllte, im speziellen aber mögliche Lagenbeziehung forderte. Man wählte zu ersteren Punkte, Geraden und Ebenen, bezog einen beliebigen Punkt des Raumes auf diese durch seine kürzesten Abstände von ihnen und stellte zwischen letzteren eine konstante Relation her. Man gelangte so zum Kreise und zur Kugel, zu den Kegelschnitten und ihren Rotationsflächen, mufste dann aber infolge der sich zusehends häufenden Schwierigkeiten von einer weiteren Verfolgung dieses Weges Abstand nehmen.

Es war das Verdienst der analytischen Geometrie, eine erste allgemeine Definition der gesetzmäfsigen Linie und Fläche dadurch zu geben, dafs sie das jene beherrschende Gesetz in einer Gleichung zwischen zwei und drei Veränderlichen, den Coordinaten eines das Gebilde beschreibenden Punktes zum Ausdruck brachte. Als notwendige unmittelbare Konsequenz dieser Auffassung ergab sich mit der Einteilung aller räumlichen Gesetzmäfsigkeiten in algebraische und in transcendente für die ersteren eine der aufsteigenden Ordnung der Gleichungen folgende systematische Behandlung.

Eine Untersuchung, ob dieses Vorgehen in der Natur jener Raumvorstellungen begründet sei, wurde nicht ausgeführt; man nahm es als selbstverständlich an, dafs die analytische Einteilung den Prinzipien der Anschauung völlig entspreche.

Es liegt aufser dem logischen Zusammenhange hier die historische Entwicklung*) der Raumlehre oder Geometrie, wie sie unser Jahrhundert gezeitigt hat, an den Werken der einzelnen Forscher genauer verfolgen zu wollen. Mir bleibt ausschliefslich die Aufgabe, den Anteil zu konstatieren, welchen einerseits die Anschauung, andererseits der Calcul hieran genommen hat, und die Wechselwirkung beider festzustellen.

Der Beginn der Periode brachte zunächst eine scharfe Scheidung

*) Eine gedrängte übersichtliche Darstellung derselben findet sich in der Einleitung zu Hankel „Die Elemente der projectiven Geometrie“ 1875.

der Wissenschaft in zwei selbständige Disciplinen, in die konstruktive und in die analytische Geometrie.

Die erstere, von französischen Geometern vornehmlich von Poncelet*) vorbereitet, wurde von Steiner**) dadurch systematisch begründet, dafs er eine begrenzte Anzahl bestimmter Raumvorstellungen und sie verbindender konstruktiver Beziehungen zum ausschliefslichen Fundament des gesamten Lehrgebäudes machte.

Er unterscheidet eine dreistufige Folge von Grundgebilden:

Der unbegrenzte Raum als dreifach ausgedehnte Punkt- und Ebenenmannigfaltigkeit repräsentiert das einzige Grundgebilde der dritten Stufe. Jeder Punkt / Jede Ebene desselben stellt als Träger eines zweifach ausgedehnten Ebenen- / Punkt- und Geradencontinuums ein solches zweiter Stufe, jede Gerade als Axe eines einfachen Ebenenbüschels / Träger einer einfachen Punktreihe eines der ersten Stufe dar.

In dem ebenen Systeme / centralen Bündel erscheinen der ebene Strahlbüschel und die geradlinige Punktreihe / das einaxige Ebenbüschel ihrerseits als Gebilde der ersten Stufe.

Als Mittel, diese Grundgebilde in ihren Elementen aufeinander zu beziehen und dadurch neue Bildungen zu erzeugen, wählte Steiner die Methode der projektiven Zuordnung in der durch Möbius***) gegebenen verallgemeinerten Fassung.

Auf dieser Grundlage gelang es ihm, die Kurven und Flächen zweiter Ordnung allgemein und erschöpfend zu behandeln und sie zum rechtlichen Eigentum der konstruktiven Geometrie zu machen. Dagegen erwies sie sich als unzureichend, um auf ihr eine allgemeine Theorie der höhern algebraischen Gesetzmäfsigkeiten aufzubauen, indem ihre konsequente Verfolgung zu speziellen Kurven- und Flächengattungen führte. Er mufste in seinen späteren Untersuchungen über algebraische Mittelpunktkurven auf die fundamentalen Sätze der Algebra zurückgreifen.

Die Geometer der Steinerschen Schule beschäftigten sich teils mit dem weiteren Ausbau der Lehre von den Linien und Flächen 2. O.

*) Poncelet „Traité des Propriétés projectives des Figures“ 1822.

**) Steiner „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“. 1832. (Gesammelte Werke Band I.)

***) Möbius „Der barycentrische Calcul“ 1826.

teils mit der konstruktiven Behandlung der nächst höheren algebraischen Gebilde Für diejenigen der dritten Ordnung ergaben sich verschiedene Erzeugungsweisen aus solchen der ersten und zweiten, welche ein Eindringen in deren Theorie in gewissem Umfange ermöglichten.

Inzwischen hatte die analytische Geometrie in einer rapiden Entwickelung diese Bestrebungen weit überholt. Durch Plücker war in seinem „Systeme der analytischen Geometrie“ (1834) bereits eine vollständige Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung gegeben und wenige Jahre später in einem zweiten Werke „Theorie der algebraischen Kurven“ (1839) eine solche für diejenigen der n^{ten} Ordnung begründet worden, welche in überraschender Allgemeinheit ihre Singularitäten zu entwickeln, deren Zusammenhang zu erkennen und sie danach einzuteilen lehrte. Trotz der eigentümlichen Auffassung dieses Mathematikers, welcher in der Geometrie nur einen Zweig der Analysis sah, geeignet gewisse Resultate und Probleme derselben zu verbildlichen, hat wie er kein zweiter Geometer einen tieferen Einblick in die Gestaltsverhältnisse der höheren algebraischen Kurven eröffnet.

In seinem letzten von F. Klein vollendeten Werke „Neue Geometrie des Raumes“ (1868) bereicherte Plücker die räumliche Auffassung um neue fundamentale Gebilde, welche zu den von Steiner aufgestellten vervollständigend hinzutraten. Indem er die Gerade als Anschauungselement zu Grunde legte, wurde durch den Raum eine vierfach-, durch die Gerade eine dreifach-, durch Ebene und Punkt je eine zweifach-, endlich durch das ebene Strahlbüschel eine einfach-unendliche Geradenmannigfaltigkeit in Evidenz gesetzt.

Das Mifsverhältnis zwischen den Fortschritten der konstruktiven und denen der rechnenden Geometrie veranlafste einige Forscher*), beide Disziplinen insofern zu verschmelzen, als sie aus der einen die grundlegenden Definitionen und Wahrheiten, aus der andern Methode und Darstellungsform übernahmen. Es gelang den Vertretern dieser Richtung, die Kluft zwischen Anschauung und Calcul scheinbar dadurch zu überbrücken, dafs sie die allgemeine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung als konstruktives Erzeugnis projektiver Kurvenbüschel der $(n-1)^{\text{ten}}$ und ersten Ordnung entwickelten und damit ihre konstruktive Entstehung aus den Elementen der Anschauung im Prinzip nachwiesen. Einen faktischen Erfolg für die rein räumliche Auffas-

*) Cremona: Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane (1862).
Preliminari di una teoria geometrica delle superficie (1867).

sung der algebraischen Kurven hatte diese Entdeckung nicht und konnte sie auch nicht haben. Denn indem sie die Kurve der n^{ten} Ordnung durch diejenigen der $(n-1)$ vorangehenden Ordnungen erklärte, machte sie ihre genauere Erkenntnis von der Erforschung letzterer abhängig und damit dieselbe im allgemeinen unmöglich. In der That sind fast alle Wahrheiten, welche auf dem algebraisch geometrischen Wege ermittelt wurden, im Grunde nur algebraische Sätze in geometrischem Gewande.

An dieser Sachlage ist dadurch wenig geändert worden, dafs es in unserer Zeit gelungen, dem Fundamentalsatz der Algebra über die Anzahl der gemeinsamen Wurzeln zweier Kurvengleichungen durch die Einführung allgemeiner Involutionsnetze eine rein geometrische Deutung*) zu geben. Denn infolge seines induktiven Charakters ist der Mechanismus des bezüglichen Schlufsverfahrens ein so verwickelter, dafs er zwar zu einer logisch strengen, der Anschauung aber unzugänglichen Konstruktion der allgemeinen Kurve n. O. führt.

Um die Mitte des Jahrhunderts unternahm es v. Staudt**), der Anschauung den verlorenen Boden wiederzugewinnen und eine streng konstruktive Raumlehre zu begründen. Er reinigte die Steinerschen Grundlagen von dem nicht unmittelbar der Anschauung entlehnten Begriffe des Doppelverhältnisses und basierte die projektiven Beziehungen der Grundgebilde statt auf dieses auf die fundamentale Konstruktion des vierten harmonischen zu drei in gerader Linie gegebenen Punkten. Er ging jedoch in seinen streng anschaulichen Entwickelungen nicht über die Theorieen der Kurven und Flächen zweiter Ordnung hinaus. Sein System wurde von Reye konsequent fortgesetzt und zu einem in sich abgeschlossenen Ganzen vollendet. Das Reyesche Lehrgebäude umfafst die Theorieen aller derjenigen Raumvorstellungen, welche aus den bekannten Grundgebilden der ersten bis dritten Stufe durch alle unter ihnen zulässigen projektiven Beziehungen überhaupt erzeugt werden können, und bildet daher ein nach Inhalt und Umfang scharf abgegrenztes Forschungsgebiet.

Es bleibt noch ein isolierter Versuch zu erwähnen, eine allge-

---

*) v. Staudt: Beiträge zur Geometrie der Lage. 1856—60.

Lüroth: Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Math. Ann. Bd. 8.

E. Kötter: Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Kurven. 1887.

**) v. Staudt: Geometrie der Lage. 1847.

Reye: Geometrie der Lage. 1. A. 1866. 4. A. 1892—93.

meine anschauungsgemäfse Definition der ebenen algebraischen Kurve aufzustellen. Grassmann*) definiert in der Ebene eine algebraische Kurve als den geometrischen Ort eines beweglichen Punktes $\mathfrak{p}$, welcher mit einer aus ihm und einer Anzahl fester Punkte und Geraden mittelst des Lineals nach einer bestimmten Vorschrift erzeugten Geraden g vereinigt liegt. Wenn der Punkt $\mathfrak{p}$ direkt oder indirekt $(n-1)$-mal in die Konstruktion der Geraden g eingeht, so wird die entstehende Kurve auf rechnerischem Wege als eine von der n^{ten} Ordnung erkannt. Rücksichtlich der Kurven dritter Ordnung gelingt es Grassmann, die lineale Erzeugung derselben aus neun beliebig in der Ebene fixierten Punkten vermittelst 351 elementarer Konstruktionen abzuleiten.

Um auch die allgemeine Kurve n^{ter} Ordnung $f(x, y) = 0$ lineal zu definieren, stellt er nach Annahme einer bestimmten Mafseinheit die konstanten Coefficienten $a_{\alpha,\beta}$ der Gleichung als ebensoviele feste Punkte $x = a_{\alpha,\beta}$, $y = 0$ der x-Achse dar und konstruiert dann mit Hilfe derselben, des Punktes $x = 1$, $y = 0$, der beiden unendlich fernen Punkte der Coordinatenaxen und eines beliebigen Punktes ξ, η durch wiederholte den Gliedern $a_{\alpha,\beta}\,\xi^{\alpha}\,\eta^{\beta}$ und ihrer Verknüpfung sich anpassende Verbindungen je zweier gegebenen oder neu entstehenden Punkte (die Richtungen resultierender Geraden als unendlich ferne Punkte mitinbegriffen) schliefslich eine Gerade g, welche auf der x-Achse einen Punkt mit der Abscisse $x = f(\xi, \eta)$ bestimmt. Die Kurve $f(x, y) = 0$ erscheint dann als Ort derjenigen Punkte ξ, η, für welche die Gerade g durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht.

Ganz abgesehen davon, dafs die lineale Anordnung der die konstanten Coefficienten repräsentierenden Punkte durch nichts in dem Charakter der Kurve begründet ist, leidet diese Konstruktion an dem Übelstande, dafs sie entgegen der ursprünglichen Definition die geforderte Koincidenz des Punktes ξ, η und der Geraden g und die vorgeschriebene Abhängigkeit beider gar nicht berücksichtigt.

Die Thatsache, dafs es die reine Geometrie nicht vermocht hat, in die Natur der algebraischen Gebilde einzudringen, ist ausschliefslich durch den Mangel an einer originalen allgemeinen Definition letzterer zu erklären. Der allmählichen Entwicklung einer solchen stand als gröfstes Hemmnis dasjenige Prinzip entgegen, auf welches Steiner die

*) Grassmann: Mechanische Erzeugung der algebraischen Kurven. Crelles Journal B. 31, B. 42, 52. Der Nachweis, dafs und wie mittelst der Grassmannschen Methode eine allgemeine Kurve n^{ter} Ordnung zu erzeugen sei, ist von Kötter im vierten Kapitel des oben citierten Werkes gegeben worden.

Raumlehre basiert hatte, nämlich die projektive Zuordnung der Grundgebilde. Die eminente Tragweite des Gedankens für die Theorieen der Linien und Flächen zweiter Ordnung schien eine hinreichende Gewähr seiner entsprechenden Bedeutung gegenüber den höheren Gebilden zu bieten, und man suchte selbst auf Kosten der Eindeutigkeit und Anschaulichkeit wie jene so auch diese als Erzeugnisse projektiver Kurven- und Flächenbüschel darzustellen. Und doch deutet schon die einfache Bemerkung, dafs alle Linien, die durch beliebige, wenn nur genügend kleine Variationen der Konstanten einer Gleichung $f(x, y) = 0$ hervorgehen, denselben formalen Charakter zeigen, ohne deshalb in projektiver Beziehung zu stehen, darauf hin, dafs allgemeinere Bedingungen für die Anschauung räumlicher Formen mafsgebend sind.

Es ist unsere Analyse der Raumvorstellungen vor der Frage stehen geblieben:

Besitzt die Anschauung allgemeine Kriterien, um einen einförmigen Flächen- oder Curventeil als einen gesetzmäfsigen zu erkennen?

Zufolge der grundsätzlichen Auffassung der Fläche und der Linie als einer stetigen Punktmannigfaltigkeit wird man die Antwort hierauf so formuliren können:

Eine Fläche oder eine Linie ist allemal dann und nur dann als ein einziges gesetzmäfsiges Punktkontinuum aufzufassen, wenn zwischen irgend einem festen Systeme einer endlichen wenn auch noch so grofsen Zahl diskreter Elemente der Mannigfaltigkeit und einem frei in letzterer beweglichen Punkt eine konstante anschauungsgemäfse Abhängigkeit statthat;

oder, was dasselbe:

wenn eine kleinste Zahl diskreter Elemente des Gebildes dasselbe nach einem bestimmten Anschauungsgesetze definiert.

Im gegenteiligen Falle mufs das Gebilde als ein zufälliges angesehen werden, da alsdann jede beliebige noch so zahlreiche Punktgruppe des Kontinuums als eine willkürliche oder unabhängige erscheint.

Durch diese Umschreibung der Begriffe stellt sich die ursprüngliche Frage in der Fassung dar:

Unter welchen Bedingungen erkennt die Anschauung ein beliebig im Raume gegebenes endliches Punktsystem als ein unabhängiges oder als ein abhängiges an?

Das einfachste räumliche Punktsystem, für welches die Frage unmittelbar eine Antwort gestattet, bilden vier Punkte in tetraedraler Lage. Entsprechend den Grundvorstellungen des Punktes, der Ebene und der Geraden offenbaren sich in der Vorstellung dieses Systemes der Anschauung als einfachste und ursprünglichste Charaktere

des Allgemeinen oder Zufälligen — des Besonderen oder Gesetzmäfsigen

der räumlichen Gestalten:

1 a) Der Begriff von 4 Punkten / Ebenen in allgemeiner oder von Punkt und Ebene und Ebene / Punkt in getrennter Lage;	1 a) Der Begriff von 4 Punkten / Ebenen in einer Ebene / durch einen Punkt oder von Punkt und Ebene / und Punkt in vereinigter Lage;
1 b) Die Vorstellung zweier sich kreuzenden Geraden;	1 b) Die Vorstellung zweier sich schneidenden Geraden;
2) Der Begriff von 3 Punkten / Ebenen in allgemeiner oder von Punkt und Ebene / Gerader in getrennter Lage;	2) Der Begriff von 3 Punkten / Ebenen in einer Geraden / durch eine Gerade oder von Punkt und Ebene / und Gerader in vereinigter Lage;
3) Die Begriffe von 2 Punkten / Ebenen oder von zwei sich schneidenden Geraden in allgemeiner Lage.	3) Die Begriffe von 2 Punkten / Ebenen oder von zwei sich schneidenden Geraden in vereinigter Lage.

Das durchgängig unterscheidende Charakteristikum für die allgemeine und die besondere Lage von Grundelementen besteht also darin, dafs die erstere bei ganz beliebigen, die letztere aber nur bei ganz bestimmten stetigen Bewegungen jedes einzelnen Elementes erhalten bleibt.

Die vorstehenden sind nicht die einzigen Grundthatsachen, welche die Anschauung in der tetraedralen Vereinigung der Grundelemente und ihren Ausartungen wahrnimmt. Eine zweite Reihe wird durch die einem solchen Gebilde eigentümliche invariante Einteilung der Punkt-, Ebenen und Geradenmannigfaltigkeiten des Raumes in Systeme sich ausschliefsender scharf abgegrenzter Teilkontinuen bedingt.

Werden die vier Paare gegenüberliegender Ecken und Flächen des Tetraeders bezeichnet durch resp.

$$\mathfrak{a},\ \alpha;\quad \mathfrak{b},\ \beta;\quad \mathfrak{c},\ \gamma;\quad \mathfrak{d},\ \delta,$$

so ergeben sich die fraglichen Teilgebiete

1) für den Ebenenraum durch:

a) $\mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d};\quad \mathfrak{b}\,|\,\mathfrak{a},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d};\quad \mathfrak{c}\,|\,\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d};\quad \mathfrak{d}\,|\,\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c};$

b) $\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}\,|\,\mathfrak{c},\ \mathfrak{d};\quad \mathfrak{a},\ \mathfrak{c}\,|\,\mathfrak{b},\ \mathfrak{d};\quad \mathfrak{a},\ \mathfrak{d}\,|\,\mathfrak{b},\ \mathfrak{c};$

c) $\mathfrak{p}_\infty\,|\,\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},$

wo der senkrechte Teilstrich die jedesmalige Trennungsweise der vier Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ durch das bezügliche partielle Ebenenkontinuum zu erkennen giebt;

2) für den Punktraum durch:

a) $T_\mathfrak{a} \equiv T_\alpha;\quad T_\mathfrak{b} \equiv T_\beta;\quad T_\mathfrak{c} \equiv T_\gamma;\quad T_\mathfrak{d} \equiv T_\delta;$

b) $T_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \equiv T_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}};\quad T_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} \equiv T_{\mathfrak{b},\mathfrak{d}};\quad T_{\mathfrak{a},\mathfrak{d}} \equiv T_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}};$

c) $[\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta] \equiv T \equiv [\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}],$

wo in der ersten Reihe die vier Seiten bzw. Scheitelräume, in der zweiten die drei Kantenkörper des endlichen Tetraederraumes T stehen.

Um die Zerlegung des Geradenraumes zu übersehen, beachte man zunächst, dafs man eine beliebig gegebene Gerade durch stetige aufserhalb der sechs Kanten des Tetraeders erfolgende Bewegungen mit jedem sich gegenüberliegenden Paare derselben zum Durchschnitt bringen kann. Indem man nämlich den Schnittpunkt der Geraden und einer Tetraederebene festhält, wird man sie erst mit der aufserhalb und darauf mit der innerhalb letzterer liegenden Kante des Paares in die geforderte Lage kontinuierlich überführen. Nun werden zwei Gegenkanten durch die vier anderen in je zwei Strecken geteilt, die paarweise kombiniert vier getrennte Scharen das Kantenpaar schneidender Geraden bestimmen. Da aber aus jeder solchen Geraden ein unmittelbarer Übergang in vier verschiedene Kontinuen möglich ist, wird die räumliche Geradenmannigfaltigkeit durch die Kanten des Tetraeders im Ganzen in 16 sich ausschliefsende Partialmannigfaltigkeiten oder Geradengebinde geteilt.

Das einzelne derselben läfst sich des Näheren durch die Angabe der vier Primärdreiseite beschreiben, in welchen seine Geraden die vier Tetraederebenen durchschneiden. Dabei ist noch zu bemerken, dafs je drei dieser Dreiseite das jedesmalige vierte eindeutig bestimmen.

Es würde hier zu weit führen, die Grundwahrnehmungen im Tetraedralsysteme in aller Vollständigkeit darzustellen und nach ihren gegenseitigen Abhängigkeiten zu untersuchen. Dagegen ist gegenüber diesen absoluten inneren noch eine relative äufsere Grundeigenschaft hervorzuheben.

Dieselbe tritt in Evidenz, wenn die Ecken des Tetraeders durch Bezeichnungen unterschieden werden. Alsdann wird nämlich durch eine Ecke $\mathfrak{d}$ einer der durch die Ebene $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$ getrennten zwei Halbräume vor dem anderen ausgezeichnet. Für den in diesem Halbraume auf der Ebene den Umfang des endlichen Dreieckes $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ in der angegebenen Eckenfolge abschreitenden Beobachter wird die Dreiecksfläche entweder zur Linken oder zur Rechten liegen. Je nachdem das erste oder das zweite der Fall ist, definiert man die Charakteristiken der Punktefolgen

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$$

durch die symbolischen Gleichungen

$$c(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \pm 1 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = \pm 1$$

und folgert hieraus die Beziehungen:

1a) $$c(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = c(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = c(\mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \pm 1,$$

b) $$c(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = c(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = c(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{c}) = \mp 1,$$

2a) $$c(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = c(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{b}) = c(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \pm 1,$$

b) $$c(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{c}) = c(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = c(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}) = \mp 1.$$

Als Mittel der Übertragung aller dieser Grundvorstellungen auf beliebige endliche Punktsysteme bieten sich der Anschauung die fundamentalen Konstruktionen:

1) der Verbindungsgeraden zweier Punkte und der Verbindungsebene dreier Punkte oder eines Punktes und einer Geraden,
2) der Schnittgeraden zweier Ebenen und des Schnittpunktes dreier Ebenen bzw. einer Geraden und einer Ebene.

Zufolge derselben ist nicht nur der Charakter eines gegebenen Punktsystemes

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

durch den Verein der Charakteristiken bestimmt

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m) = +1, \; -1, \; 0^*),$$

sondern es tritt auch eine sich ins Unendliche fortsetzende Descendenz vollkommen und unzweideutig definierter analoger Systeme gleichzeitig in Erscheinung.

Es bestimmen nämlich die n-Grundpunkte $\mathfrak{p}_i$ zu je dreien ν Ebenen E, und diese schneiden sich zu je dreien ausser in jenen in n_1 Punkten eines neuen, des ersten abgeleiteten Systemes

$$\mathfrak{P}'_{n_1} \equiv \mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \ldots, \mathfrak{p}'_{n_1}.$$

---

*) Durch die Gleichung $c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m) = 0$ wird die abhängige oder planare Lage des Punktquadrupels ausgedrückt.

Ganz ebenso fixieren die $n + n_1$ Punkte des combinierten Systemes $\mathfrak{P}_n$, $\mathfrak{P}_{n_1}'$ zu mindestens je dreien aufser den schon vorhandenen weitere ν_1 Ebenen E', und diese begegnen sich aufser in den früheren in den n_2 Punkten des zweiten abgeleiteten Systemes

$$\mathfrak{P}_{n_2}'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \ldots, \mathfrak{p}_{n_2}''.$$

Allgemein werden die Elemente der aus dem Stammsysteme und seinen ersten m Ableitungen zusammengesetzten Punktgruppe

$$\mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}_{n_1}', \mathfrak{P}_{n_2}'', \ldots, \mathfrak{P}_{n_m}^{(m)}$$

aufser durch die Ebenen

$$E, E', E'', \ldots, E^{(m-1)}$$

noch durch ν_m weitere Ebenen $E^{(m)}$ verbunden, und diese werden erstere und einander aufser in den erzeugenden noch in den n_{m+1} Punkten der $(m+1)^{\text{ten}}$ Ableitung durchschneiden.

Die Gesamtheit der so eindeutig definierten Punktableitungen

$$\mathfrak{P}_{n_1}', \mathfrak{P}_{n_2}'', \mathfrak{P}_{n_3}''', \ldots$$

fasse ich unter dem Begriff des vollständigen planaren Netzes

$$N(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n)$$

des gegebenen Stammsystemes zusammen

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n.$$

Diese anschauungsgemäfse Erweiterung der Vorstellung einer endlichen Punktgruppe involviert sofort die nachstehenden fundamentalen Definitionen:

1) Unter der m^{ten} Stufe des Charakters eines gegebenen räumlichen Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ ist der Verein der Charakteristiken zu verstehen

$$c(\mathfrak{t}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = +1, \ -1, 0,$$

welche allen aus den Elementen des ursprünglichen und der ersten m abgeleiteten Systeme zu bildenden Quadrupeln zukommen;

2) das System $\mathfrak{P}_n$ stellt eine absolute Allgemeinheit der m^{ten} Stufe dar, wenn jede innerhalb einer endlichen wenn auch noch so kleinen Umgebung der n Grundpunkte erfolgende Bewegung derselben seinen Charakter bis in die m^{te} Stufe invariant läfst;

3) das System erscheint dagegen als eine absolute Singularität der m^{ten} Stufe, wenn die m^{te} die niedrigste Stufe in seinem Charakter bezeichnet, welche bei gewissen wenn auch noch so geringen

stetigen Bewegungen jedes beliebigen Grundpunktes eine Änderung erfährt.

Entsprechend den Grundvorstellungen von vier, drei und zwei gleichartigen Elementen in unabhängiger oder in abhängiger Lage werden sich auch die Singularitäten einer beliebigen Stufe in drei Kategorieen sondern.

Die Abhängigkeit erster Art oder die planare Dependenz eines Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ leitet die Vorstellung der gesetzmäfsigen Fläche in eindeutig bestimmter anschauungsgemäfser Weise aus derjenigen der Ebene ab. Wenn nämlich in dem planar abhängigen Systeme $\mathfrak{P}_n$ während der linealen Bewegung eines einzelnen Grundpunktes $\bar{\mathfrak{p}}_n$ aus seiner Anfangslage $\mathfrak{p}_n$ in eine Endlage $\mathfrak{a}_n$ vier Punkte des erweiterten Systemes

$$\mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}'_{n_1}, \mathfrak{P}''_{n_2}, \ldots, \mathfrak{P}^{(m)}_{n_m},$$

von denen mindestens einer der letzten Punktableitung angehört, aus singulärer in allgemeine Lage übergehend in dieser verbleiben, so mufs bei der stetigen Rückbewegung des Punktes $\bar{\mathfrak{p}}_n$ aus $\mathfrak{a}_n$ durch die Lage $\mathfrak{p}_n$ in eine dritte $\mathfrak{b}_n$ eine bestimmte Folge der vier Punkte

$$\mathfrak{t}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$$

ihre Charakteristik wechseln gemäfs den Beziehungen:

$$c_{\mathfrak{a}_n}(\mathfrak{t}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \pm 1, \quad c_{\mathfrak{p}_n}(\mathfrak{t}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0, \quad c_{\mathfrak{b}_n}(\mathfrak{t}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \mp 1.$$

Man denke sich durch die Gerade $|\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n$ eine beliebige Ebene gelegt und in derselben über der Strecke $\overline{\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n}$ als Durchmesser einen Kreis geschlagen. Da alsdann beim Übergange des Punktes $\bar{\mathfrak{p}}_n$ aus $\mathfrak{a}_n$ auf dem einen oder dem andern Halbkreise nach $\mathfrak{b}_n$ die Punktefolge

$$\mathfrak{t}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$$

gleichfalls ihre Charakteristik ändert, mufs $\bar{\mathfrak{p}}_n$ jedenfalls einen Punkt $\mathfrak{x}_n$ passieren, für welchen die Beziehung gilt:

$$c(\mathfrak{t}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0.$$

Bei der Rotation des Kreises um die Achse $|\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n$ beschreibt dieser Punkt $\mathfrak{x}_n$ auf der entstehenden Kugel eine geschlossene Kurve C_n, und diese erzeugt bei stetiger Veränderung des Radius der Kugel vom Werte $r = 0$ ab in der Umgebung des Mittelpunktes $\mathfrak{p}_n$ eine bestimmte Fläche F_n, bedingt durch die planare Gesetzmäfsigkeit

$$c(\mathfrak{t}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0.$$

Hiernach wird durch die in dem ursprünglichen Punktsysteme be-

stehende Singularität zu je $n-1$ festen Grundpunkten als Ort des beweglichen n^{ten} eine ganz bestimmte Fläche festgelegt.

Sind die so resultierenden n Flächen im besonderen identisch, so ist die planare Gesetzmäfsigkeit als eine homogene oder als Ebenheit in höherem Sinne ausgezeichnet. In dem Charakter des bis zur m^{ten} Ableitung erweiterten Stammsystemes $\mathfrak{P}_n$ drückt sich die Bedingung hierfür dadurch aus, dafs irgend welche in einer das Punktequadrupel

$$\mathfrak{t},\ \mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z}$$

aus den n Grundpunkten ableitenden Elementarkonstruktion

$$C(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n)$$

vorgenommene Vertauschungen der n Elemente

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

— es genügen die successiven Permutationen eines mit den $n-1$ anderen — für das jedesmal resultierende Quadrupel

$$\mathfrak{t},\ \mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z}$$

übereinstimmend die abhängige Lage in einer Ebene ergeben.

Die Abhängigkeit zweiter Art oder die lineale Dependenz einer Punktgruppe $\mathfrak{P}_n$ läfst sich leicht auf die Coexistenz zweier Planaren zurückführen.

Offenbar ist das Postulat, dafs die drei Punkte

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z}$$

des erweiterten Punktsystemes

$$\mathfrak{P}_n,\ \mathfrak{P}'_{n_1},\ \mathfrak{P}''_{n_2},\ \ldots,\ \mathfrak{P}^{m}_{n_m},$$

von denen mindestens einer der letzten Punktableitung angehört, in gerader Linie liegen, gleichbedeutend mit dem anderen, dafs der Punkt $\mathfrak{z}$ in zwei Seitenflächen

$$[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}_1] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p}_2]$$

eines Tetraeders fällt

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2\,.$$

Man kann dann unter Festhaltung der $n-1$ Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$$

den Punkt $\mathfrak{p}_n$ zum Mittelpunkt einer Kugel mit so kleinem Radius r wählen, dafs die Punkte

$$\mathfrak{x} \text{ und } \mathfrak{y}$$

zufolge ihrer stetigen Abhängigkeit vom Punkte $\mathfrak{p}_n$ bei allen inner-

halb der Kugel erfolgenden Bewegungen desselben zu den beiden anderen

$$\mathfrak{p}_1 \text{ und } \mathfrak{p}_2$$

in allgemeiner Lage verbleiben. Nun werden aber durch die Beziehungen

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$$

nach Früherem als Örter des Punktes $\mathfrak{p}_n$ zwei Flächen eindeutig bestimmt, die sich in einer durch $\mathfrak{p}_n$ gehenden Kurve K_n schneiden. Da für jeden innerhalb der Kugel liegenden Punkt letzterer einerseits die $2 \cdot 4$ zugehörigen Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$$

in je einer Ebene liegen, andererseits die vier Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$$

ein planar unabhängiges Quadrupel bilden, so folgt, dafs die Raumcurve K_n das anschauungsgemäfse Äquivalent der linealen Abhängigkeit darstellt

$$c(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0 .$$

Wenn die den Systemen von je $n-1$ Grundpunkten $\mathfrak{p}_i$ durch vorstehende Beziehung zugeordneten n Kurven identisch sind oder, was dasselbe, wenn beliebige in einer Elementarkonstruktion

$$C(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n)$$

des Tripels

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$$

vorgenommene Permutation der n Grundpunkte die abhängige Lage der jedesmal resultierenden drei Elemente ungeändert lassen, so ist die Singularität des Systemes $\mathfrak{P}_n$ als eine lineale Homogeneität oder als Gestrecktheit in höherem Sinne aufzufassen.

Die planare Gesetzmäfsigkeit zählt als eine, die lineale als zwei einfache Bedingungen, welche einem gegebenen Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ auferlegt werden können.

Eine Abhängigkeit dritter Art ist mindestens drei und kann mehr als drei einfachen Bedingungen äquivalent sein.

In dem ersten Falle, wo die Singularität in dem erweiterten Systeme

$$\mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}'_{n_1}, \mathfrak{P}''_{n_2}, \ldots, \mathfrak{P}^{m}_{n_m}$$

dargestellt ist durch die Coincidenz zweier Punkte

$$\mathfrak{y} \text{ und } \mathfrak{z}$$

oder durch die centrische Abhängigkeit der sie bestimmenden $2 \cdot 3$ Ebenen

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3 \quad \text{und} \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3,$$

entsprechen ihr die drei einfachen Bedingungen:

$$c(\mathfrak{y}, \xi_1) = c(\mathfrak{y}, \xi_2) = c(\mathfrak{y}, \xi_3) = 0 \text{ resp. } c(\mathfrak{z}, \eta_1) = c(\mathfrak{z}, \eta_2) = c(\mathfrak{z}, \eta_3) = 0.$$

Bei festgedachten $n-1$ Grundpunkten ist daher der n^{te} an das Schnittpunktsystem der hierdurch definierten drei Flächen, also an eine Gruppe diskreter Punkte gebunden.

Die Kriterien der Homogeneität sind für die Abhängigkeiten dritter und höherer Art ganz analog denjenigen für die planaren und linearen Singularitäten.

Alle bisher geschilderten Kategorieen gesetzmäfsiger räumlicher Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ haben die charakteristische Eigenschaft gemein, durch eine endliche Anzahl von Elementarkonstruktionen erklärt zu werden, und sind füglich in eine Klasse zusammenzufassen.

Denselben steht naturgemäfs die Gesamtheit derjenigen gesetzmäfsigen Systeme $\mathfrak{P}_n$ gegenüber, zu deren Erkenntnis und Definition eine unendliche Reihe solcher Konstruktionen erforderlich ist.

Man denke sich aus dem Stammsysteme

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

vermöge einer beliebigen aber bestimmten Konstruktionenreihe

$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

ein erstes gleichwertiges*) System

$$\mathfrak{P}_n' \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_n',$$

aus diesem durch Anwendung der nämlichen Konstruktionenreihe ein zweites

$$\mathfrak{P}_n'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \ldots, \mathfrak{p}_n'',$$

und durch fortgesetzte Wiederholung des einmal vorgeschriebenen Verfahrens eine unbegrenzte Folge solcher abgeleitet:

$$\mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}_n', \mathfrak{P}_n'', \mathfrak{P}_n''', \ldots \text{ in infin.}$$

Alsdann wird irgend eine planare Punktkonstruktion

$$C(\mathfrak{p}_1^{(h)}, \mathfrak{p}_2^{(h)}, \ldots, \mathfrak{p}_n^{(h)})$$

bei successiver Anwendung auf diese Punktgruppen eine unbegrenzte diskrete Punktfolge ergeben:

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \ldots \text{ in infin.}$$

*) Zwei Punktgruppen $\mathfrak{P}_n$ und $\mathfrak{Q}_n$ heifsen gleichwertig, wenn jede in dem planaren Netze der anderen enthalten ist.

Wenn die so eindeutig definierte Punktreihe von der Beschaffenheit ist, dafs zu jeder noch so kleinen Länge ϱ eine endliche Folge existiert

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(r)},$$

nach deren Absonderung alle übrigen Punkte der Reihe innerhalb einer Kugel vom Radius ϱ liegen, ist sie als die Darstellung eines transcendenten Punktes des planaren Netzes anzusehen.

Die schon durch Möbius bewiesene Möglichkeit, in einem planaren Netze von fünf Grundpunkten sich irgend einem festen Punkte im Raume durch eine endliche Zahl elementarer Konstruktionen bis auf jede gegebene Distanz zu nähern, giebt der Anschauung im Princip das Mittel, die allgemeine oder singuläre Lage eines Punktquadrupels auch dann noch zu entscheiden, wenn ein oder mehrere Punkte desselben dem transcendenten Systeme angehören.

Hiermit ist aber die anschauungsgemäfse Definition der transcendenten Gesetzmäfsigkeit eines endlichen Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ gegeben, und es wird die Raumanschauung durch die Vorstellungen der transcendenten Fläche und Kurve und ihrer Durchschnittsysteme mit einander oder mit rationalen Flächen und Kurven bereichert.

In konsequenter Folge der Reduktion aller gesetzmäfsigen Raumgebilde auf sie bestimmende elementar abhängige Punktsysteme mufs sich die Natur jener aus der Eigenart dieser entwickeln lassen. Die Frage nach dem Zusammenhange und den Singularitäten einer nach dem Durchschnittsysteme resp. der Berührung zweier und mehrerer gegebenen Flächen oder Kurven wird an letzter Stelle durch den differenzierten Charakter der das einzelne oder das zusammengesetzte Gebilde ersetzenden Punktgruppe entschieden. Es wird daher die Theorie der räumlichen Punkt- und Ebenensysteme und ihrer planaren Netze für die Lehre der doppelt gekrümmten Flächen und Kurven, die Theorie der ebenen Punkt- und Geradensysteme und ihrer linealen Netze für die Lehre von den ebenen Kurven die natürliche Grundlage bilden.

Innerhalb des endlichen Gültigkeitsbereiches eines Netzes handelt es sich vornehmlich um die Untersuchung des aus dem Stammsysteme und seinen m ersten Ableitungen zusammengesetzten Gebildes

$$\mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}'_{n_1}, \mathfrak{P}''_{n_2}, \ldots, \mathfrak{P}^{(m)}_{n_m}.$$

Da dasselbe, falls es ein gesetzmäfsiges darstellt, als ein Grenz-

fall einer bis in die m^{te} Stufe des Charakters unabhängigen Punktgruppe erscheint, diese ihrerseits aber unter den Allgemeinbegriff des endlichen Punktsystemes fällt, werden an den Eingang einer anschauungsgemäfsen Raumlehre die beiden Aufgaben treten:

1) Die Feststellung der einfachsten unabhängigen Bestimmungsstücke eines beliebig gegebenen räumlichen bzw. ebenen Punktsystemes

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n;$$

2) seine vollständige Beschreibung aus diesen Grundbedingungen.

Die hier aus den Elementen der Raumvorstellung deduzierte Erkenntnis von der fundamentalen Bedeutung der Systeme diskreter Anschauungselemente wird durch die Resultate der analytischen Geometrie gleichfalls nahe gelegt.

Die algebraische Definition einer Fläche $F^{(n)}$ — Analoges gilt von der ebenen Kurve $C^{(n)}$ — setzt das System von $\varphi(n)$ Punkten auf diesem Gebilde in schärfsten Gegensatz zu dem Systeme von $\varphi(n)$ Punkten im Raume überhaupt. Das Gemeinsame in der Natur der Flächen n^{ter} Ordnung ist also durch den Charakter je eines speziellen Systemes einer bestimmten Anzahl $\varphi(n)$ von Punkten, das Besondere oder Charakteristische der einzelnen Fläche aber durch den Charakter eines Systemes von beliebigen $\varphi(n) - 1$ Punkten im Raume bedingt. Ist der Begriff der algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung rein durch die Anschauung zu fassen, so mufs letztere aus dem Systeme von $\varphi(n)$ Punkten des Gebildes das durch die Ordnung n involvierte konstante Gesetz, und aus dem Systeme von $\varphi(n) - 1$ beliebig im Raume gewählten Elementen die individuellen Eigenschaften der durch sie gehenden Fläche n^{ter} Ordnung erkennen und das Gebilde vollkommen beschreiben können. Falls eine Theorie der algebraischen Flächen rein auf dem Boden der Anschauung möglich ist, wird sie ihren Ausgang auch hiernach von den räumlichen Punktsystemen nehmen.

Aus diesen engeren Gesichtspunkten habe ich vor längerer Zeit eine Untersuchung der allgemeinen räumlichen Punktsysteme und ihrer Netze aufgenommen und in meiner 1888 vollendeten noch unveröffentlichten Habilitationsschrift „Geometrische Konstruktionen und Definitionen algebraischer Gebilde etc.“ die Frage nach den geometrischen Äquivalenzen der bekannten algebraischen Bedingungen für die Lage von $\varphi(n)$ Punkten aufser oder auf einer Fläche n^{ter} Ordnung eingehend behandelt. Eine später zum Zwecke des Druckes

begonnene Umarbeitung der Schrift zeigte mir die unabweisliche Notwendigkeit, einer allgemeinen Theorie der planaren und linealen Netze eine solche ihrer räumlichen und ebenen Stammsysteme vorauszuschicken.

Es bietet der Raum gemäfs seinen drei Anschauungselementen auch drei koordinierte Gattungen von Grundgebilden dar:

1) das Punktsystem, 2) das Ebenensystem, 3) das Geradensystem,

welchen sich vier Kategorieen gemischter Gebilde unterordnen.

Die Definition des Charakters

eines Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ bzw. eines Ebenensystemes E_n

durch die Art der zugehörigen Einteilung

der räumlichen Ebenenmannigfaltigkeit — bezw. — der räumlichen Punktmannigfaltigkeit

machte ihre erfolgreiche Behandlung abhängig von derjenigen

1) des einfachsten Teilgebietes der Mannigfaltigkeit,
des Primärvieleckes bezw. Primärvielflaches,
2) der in den Elementen des Grundgebildes bestimmten Stammsysteme,

des Kantensystemes eines Strahlenbündels. | des Geradensystemes eines ebenen Punktfeldes.

Nach dem Erscheinen meines die erstgenannten Raumvorstellungen behandelnden Buches „Zur Morphologie der Polyeder Leipzig 1891“ wandte ich mich dem Studium der Grundgebilde der Ebene und der ihnen korrespondierenden des Punktes zu.

Die ebene Geometrie umfafst zwei einander koordinierte und reciproke Grundgebilde

1) das Punktsystem $\mathfrak{P}_n$, 2) das Geradensystem G_n,

denen sich ein gemischtes System unterordnet

3) $$\Sigma_{m,n} = \mathfrak{P}_m,\ G_n.$$

Zufolge der völligen Analogie in den Betrachungsweisen der beiden eigentlichen Grundgebilde sollte der Inhalt des Buches dem ursprünglichen Plane entsprechend sich in die drei Abschnitte gliedern:

I. in die Ermittelung der unabhängigen Grundbedingungen einer endlichen ebenen Punktgruppe $\mathfrak{P}_n$ und in ihre vollständige Beschreibung aus denselben;
II. in die systematische Entwickelung der verschiedenen Klassen solcher Gebilde;
III. in die Darstellung des Zusammenhanges zwischen den typischen

Punktsystemen einer gegebenen Singularität und den positiven und ganzzahligen Lösungen einer bestimmten lineardiophantischen Gleichung.

Während der Ausarbeitung gewann jedoch schon der erste Abschnitt eine solche Ausdehnung, dafs mir eine Teilung des Buches in zwei Bände dringend geboten schien.

Der vorliegende I. Band behandelt in den 15 Paragraphen des ersten Abschnittes die Theorie eines beliebig in der Ebene gegebenen endlichen Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$, welche in den 2 Paragraphen des Anhanges durch ihre Übertragung auf die endlichen ebenen Geradensysteme G_n und eine kurze Diskussion des gemischten Systemes $\Sigma_{m,n}$ abgeschlossen wird.

Bei der Neuheit der auftretenden Fragen wie der sie lösenden Methoden glaube ich das Verständnis der Schrift zu erleichtern, wenn ich hier noch eine genetische Schilderung ihres Gedankenganges und eine übersichtliche Zusammenstellung der hauptsächlichsten Resultate gebe.

Die in § 1 aus den Grundthatsachen der Anschauung abgeleitete Definition des Charakters eines gegebenen endlichen Punktsystemes

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

durch den Verein der n_3 Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l) = +1, -1, 0$$

führt unmittelbar zu der Hauptfrage:

Existieren Kombinationen von Punktetripeln, welche alle für die Gesamtheit der Tripel notwendigen und hinreichenden Bestimmungen enthalten?

Die singulären oder die Tripel der Charakteristik 0 betreffend entwickelt der § 2 allgemeine Regeln, um unabhängige Vereine derselben aufzufinden und damit den Grad der Singularität der vorgelegten Punktgruppe zu bestimmen.

Behufs Entscheidung der allgemeinen Frage wird in § 3 eine zweite Erklärung für den Charakter eines endlichen Punktsystemes aufgestellt.

Es wird ein um einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}_i$ in vorgeschriebenem Sinne gedrehter Strahl die $n-1$ übrigen Grundpunkte in einer bestimmten Reihenfolge passieren:

$$\mathfrak{p}_1^{(i)}, \mathfrak{p}_2^{(i)}, \ldots, (\mathfrak{p}_a^{(i)}, \ldots, \mathfrak{p}_b^{(i)}), \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}^{(i)},$$

wo jedes Klammernpaar eine lineale oder eine Punktgruppe indifferenter Folge einschliefst.

Ich nenne die einem Punkte $\mathfrak{p}_i$ so zugeordnete Folge der übrigen Punkte das Ortszeichen oder den Index des Punktes $\mathfrak{p}_i$ in dem Systeme

$$\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_n \equiv \mathfrak{P}_{n-1}^{(i)}$$

und setze bezeichnend

a) bei linksseitigem oder positivem Drehungssinne:

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1^{(i)}, \mathfrak{p}_2^{(i)}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}^{(i)},$$

b) bei rechtsseitigem oder negativem Drehungssinne:

$$J'(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1^{(i)}, \mathfrak{p}_{n-1}^{(i)}, \ldots, \mathfrak{p}_2^{(i)},$$

c) bei unbestimmtem Drehungssinne:

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1^{(i)}, \mathfrak{p}_2^{(i)}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}^{(i)}.$$

Dann definieren die n Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1), 'J(\mathfrak{p}_2), \ldots, 'J(\mathfrak{p}_n)$$

das Indexsystem der gegebenen Punktgruppe $\mathfrak{P}_n$.

Die Bedeutung dieses Schemas ergiebt sich aus den beiden fundamentalen Sätzen:

Theorem 1. Damit ein Schema der Form

$$\begin{aligned} 'J(\mathfrak{p}_i) &= \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{l_1}, \mathfrak{p}_{m_1}, & 'J(\mathfrak{p}_k) &= \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{l_2}, \mathfrak{p}_{m_2}, \\ 'J(\mathfrak{p}_l) &= \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{k_1}, & 'J(\mathfrak{p}_m) &= \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{k_2}, \end{aligned}$$

worin die $2 \cdot 2$ Paare

$$\mathfrak{p}_{l_h}, \mathfrak{p}_{m_h} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{i_h}, \mathfrak{p}_{k_h},$$

abgesehen von der Reihenfolge ihrer Elemente identisch sind mit resp. den beiden anderen

$$\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k,$$

übereinstimme mit dem Indexsysteme eines linear unabhängigen Punktequadrupels

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,$$

ist es nothwendig und hinreichend,

a) dafs entweder die Folge

$$\mathfrak{p}_{l_1}, \mathfrak{p}_{l_2}, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}$$

nur zwei verschiedene Elemente aufweist,

b) oder dafs sie drei solche zählt,

c) oder dafs, falls vier vorhanden, die Folge

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$$

zu einer anderen Permutationsklasse gehört;

Theorem 2. In einem ebenen Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

stehen das Charakteristikensystem der $\binom{n}{3}$ Punkttripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4; \quad \ldots; \quad \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n$$

und das System der n Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1), 'J(\mathfrak{p}_2), \ldots, 'J(\mathfrak{p}_n)$$

in eindeutig umkehrbarer Abhängigkeit.

Der Begriff des Indexsystemes bietet gegenüber dem des Charakteristikensystemes den grofsen Vorteil der Einheitlichkeit und Übersichtlichkeit. Als eine erste Anwendung desselben wird in § 4 die durch eine Punktgruppe $\mathfrak{P}_n$ bedingte Einteilung des ebenen Strahlenfeldes in ein System sich ausschliefsender primärer Strahlenbereiche behandelt. Die Grenzen eines solchen sind durch eine gewisse Folge von mindestens drei und höchstens n Punkten bestimmt, welche sich aus dem Indexsysteme ablesen läfst. Der Paragraph schliefst mit der Aufstellung einer für alle Punktsysteme konstanter Singularität A invarianten Relation

$$x_3 - x_5 - 2x_6 - 3x_7 - \cdots = 4 + 2A,$$

worin x_m die Anzahl der Primär-m-Ecke bezeichnet.

Die Untersuchungen des § 5 beziehen sich auf die in einem Indexsysteme herrschenden Abhängigkeiten. Es werden zunächst mehrere Beweise des Satzes gegeben:

Theorem 4. In jedem Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ ist der Index eines Punktes durch diejenigen der $n - 1$ anderen bis auf seinen Drehungssinn unzweideutig definiert,

und darauf derselbe an einer Gruppe aus vier festen und einem veränderlichen Punkte exemplifiziert. Der hierbei bemerkenswerte Umstand, dafs je vier von den zwölf Primärflächen, in welche die sechs Verbindungsgeraden der vier festen Grundpunkte die Ebene zerschneiden, rücksichtlich des in ihnen gelegenen fünften Punktes die gleichen Indices aufweisen, involviert die allgemeine Frage:

Welches ist die Maximalzahl der Primärflächen in dem Systeme der Verbindungsgeraden einer allgemeinen Punktgruppe $\mathfrak{P}_n$, denen in bezug auf diese die gleichen Indices zukommen können?

Das Problem macht eingehendere substitutionentheoretische Betrachtungen erforderlich und findet schliefslich seine Lösung durch die beiden Sätze:

Theorem 5. In einem allgemeinen Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \ \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_n$$

können höchstens n Primärflächen in ihren Indices übereinstimmen, und zwar ordnen sich dann dieselben allemal zu einer cyklischen Folge

$$F(\mathfrak{q}_1), \ F'(\mathfrak{q}_2), \ \ldots, \ F(\mathfrak{q}_n), \ F(\mathfrak{q}_1),$$

in welcher je zwei benachbarte Individuen

$$F(\mathfrak{q}_i) \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{q}_{i+1})$$

ein zu ihrer gemeinsamen Grenzecke $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Paar von Scheitelflächen darstellen;

Theorem 5a. Wenn in einem Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ m getrennte Primärflächen $F(\mathfrak{q}_i)$ gleiche Indices $J(\mathfrak{q}_i)$ besitzen, so gelten mit bezug auf mindestens eine Untergruppe

$$\mathfrak{p}_1, \ \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_m$$

die Relationen

$$J(\mathfrak{p}_1) = J(\mathfrak{p}_2) = \cdots = J(\mathfrak{p}_m).$$

In § 6 wird die Diskussion des Indexsystemes weiter fortgesetzt. Eine neue der Vorstellung des allgemeinen Punktetripels entnommene Grundthatsache der Anschauung führt zu den folgenden Grundgesetzen des Indexsystemes:

Theorem 6. Wenn von den Indices der Elemente eines allgemeinen Tripels

$$\mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{p}_l$$

zwei die Formen haben

$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{q}_1, \ \mathfrak{q}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{q}_{\alpha_1}, \ \mathfrak{p}_l, \ \mathfrak{q}_1', \ \mathfrak{q}_2', \ \ldots, \ \mathfrak{q}_{\alpha_2}',$$
$$J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{r}_1, \ \mathfrak{r}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{r}_{\beta_1}, \ \mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{r}_1', \ \mathfrak{r}_2', \ \ldots, \ \mathfrak{r}_{\beta_2}',$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2)$$

und die Reihen

$$\mathfrak{q}_1, \ \mathfrak{q}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{q}_{\alpha_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_1', \ \mathfrak{q}_2', \ \ldots, \ \mathfrak{q}_{\alpha_2}'$$

mit resp. den Reihen

$$\mathfrak{r}_1, \ \mathfrak{r}_2, \ ., ., \ \mathfrak{r}_{\beta_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_1', \ \mathfrak{r}_2', \ \ldots, \ \mathfrak{r}_{\beta_2}'$$

die gemeinsamen Gruppen besitzen

$$\mathfrak{f}_1, \ \mathfrak{f}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{f}_{\beta_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{t}_1, \ \mathfrak{t}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{t}_{\delta_1},$$

dagegen die Reihen

$$\mathfrak{q}_1, \ \mathfrak{q}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{q}_{\alpha_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_1', \ \mathfrak{q}_2', \ \ldots, \ \mathfrak{q}_{\alpha_2}'$$

mit resp. den Reihen

$$\mathfrak{r}_1', \ \mathfrak{r}_2', \ \ldots, \ \mathfrak{r}_{\beta_2}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_1, \ \mathfrak{r}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{r}_{\beta_1}$$

die Gruppen

$$\mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2', \ldots, \mathfrak{f}_{\gamma_2}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{t}_1', \mathfrak{t}_2', \ldots, \mathfrak{t}_{\delta_2}',$$

so bestimmt sich der dritte Index notwendig durch

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k[\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_{\gamma_1}, \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots, \mathfrak{t}_{\delta_1}],\ \mathfrak{p}_l,\ [\mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2', \ldots, \mathfrak{f}_{\gamma_2}', \mathfrak{t}_1', \mathfrak{t}_2', \ldots, \mathfrak{t}_{\delta_2}'];$$

und umgekehrt:

Ist der Index eines der drei Elemente gegeben durch

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k,\ [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha],\ \mathfrak{p}_l,\ [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\beta],$$

so stellen sich diejenigen der beiden anderen allemal in den Formen dar

$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_1}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_{\beta_1}],\ \mathfrak{p}_l,\ [\mathfrak{q}_{\alpha_1+1}, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha \cdot \mathfrak{r}_{\beta_1+1}, \ldots, \mathfrak{r}_\beta],$$
$$J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_1}, \mathfrak{r}_{\beta_1+1}, \ldots, \mathfrak{r}_\beta],\ \mathfrak{p}_k,\ [\mathfrak{q}_{\alpha_1+1}, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_{\beta_1}].$$

Von den zahlreichen wichtigen Konsequenzen dieses Satzes mag hier nur die eine hervorgehoben werden, die in gewissem Sinne eine Umkehrung des Theoremes (4) darstellt, nämlich:

Theorem 7. Wenn das Indexsystem einer Punktgruppe

$$\mathfrak{P}_{n-1} \equiv \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-1}$$

gegeben ist durch

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_{n-1}),$$

und es stimmt der gleichfalls bekannte Index

$$J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-1}$$

eines n^{ten} Punktes $\mathfrak{p}_n$ mit keinem jener Indices überein, so ist das Indexsystem der vollständigen Gruppe

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n$$

vollkommen und unzweideutig definiert.

Der § 7 knüpft an die Betrachtungen des § 4 über primäre Punktgruppen an und unterzieht das System der so genannten Fundamentaltripel eines gegebenen Gebildes $\mathfrak{P}_n$ einer eingehenden Erörterung.

Ein Fundamentaltripel erscheint charakterisiert durch zwei Daten:

1) durch die ihm zukommende Charakteristik

$$c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l) = \pm 1,$$

2) durch den ihm zugehörigen primären Strahlenbereich

a) $\mathfrak{p}_i | \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$, b) $\mathfrak{p}_k | \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l$, c) $\mathfrak{p}_l | \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$, d) $\mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$

mit den resp. Hauptpunkten

a) $\mathfrak{p}_i$, b) $\mathfrak{p}_k$, c) $\mathfrak{p}_l$, d) $\mathfrak{p}_\infty$.

Es wird zunächst der Satz bewiesen:

Theorem 8. In allen möglichen ebenen Punktsystemen von je n Elementen erreicht die Anzahl der Fundamentaltripel ihr Minimum mit dem Werte n,
und dann der gegenseitige Zusammenhang und die Verknüpfungsweise der Fundamentaltripel in einem beliebigen Punktsysteme behandelt. Es würde zu weit führen, alle hierher gehörigen Sätze einzeln aufzuzählen. Die Bedeutung des Vereins der primären Punktetripel eines Punktsystems beruht auf dem Satze:

Theorem 9. Ein ebenes Punktsystem $\mathfrak{P}_n$ bewahrt bei stetigen und endlichen Bewegungen seiner Elemente so lange und nur so lange einen invarianten Charakter, wie das System seiner primären Punktetripel bestehen bleibt; es ändert ihn allemal dann und nur dann, wenn ein Fundamentaltripel eine Inversion erfährt d. h. wenn der Hauptpunkt desselben die endliche Verbindungsstrecke seiner beiden anderen Punkte passiert.

Im Indexsysteme ist ein Fundamentaltripel nach einem Spezialfalle des Theoremes (6) dadurch charakterisiert, dafs je zwei seiner Elemente in dem Index des dritten benachbart sind. Der Inversion des Tripels

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

entspricht die Transposition der drei Elementepaare

$$\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l;\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i;\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k$$

in den drei Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i),\ 'J(\mathfrak{p}_k),\ 'J(\mathfrak{p}_l).$$

Es zeigt sich, dafs das obige Grundgesetz des Indexsystemes vollkommen ausreicht, nicht nur die Gruppe der Fundamentaltripel sondern auch ihre Minimalzahl n zu bestimmen.

Das Beweisverfahren besteht in der Aufstellung eigentümlicher, nach einem gewissen Prinzip gebildeter Folgen von Elementetripeln, welche in ihren Endgliedern stets Fundamentaltripel liefern. Die Diskussion dieser so genannten Fundamentalreihen endigt die Untersuchungen des Paragraphen.

Das Theorem (9) legt den Gedanken nahe, dafs die Gruppe der nach Charakteristiken und Hauptpunkten wohl definierten Fundamentaltripel eines gegebenen Punktgebildes $\mathfrak{P}_n$ die notwendigen und hinreichenden Bestimmungen für seinen Gesamtcharakter enthalte. Um hierüber einen festeren Anhalt zu gewinnen, wird in den §§ 8—10 die Beschreibung der verschiedenen Punktgruppen $\mathfrak{P}_4$, $\mathfrak{P}_5$ und $\mathfrak{P}_6$ aus den nach Vorschrift des § 7 zusammenzusetzenden Gruppen von Fundamentaltripeln versucht.

Es ergiebt sich ohne Mühe, dafs allen Systemen $\mathfrak{P}_4$ und $\mathfrak{P}_5$ je eine einzige Verknüpfung aus vier und fünf Fundamentaltripeln zu Grunde liegt, und dafs sie durch jede zulässige Charakteristikenkombination letzterer vollkommen und eindeutig bestimmt sind.

Wesentlich komplizierter aber auch instruktiver gestaltet sich die Diskussion des Punktsystemes $\mathfrak{P}_6$. Die Resultate der diesbezüglichen eingehenden Untersuchung bestehen in den folgenden Sätzen:

Theorem 11. Sechs in der Ebene frei bewegliche Punkte können bei allgemeiner gegenseitiger Lage im Ganzen vier verschiedenartige Verkettungen primärer Punktetripel bilden, nämlich entsprechend den Schematen:

I. $p_6, p_1, p_2;\ p_1, p_2, p_3;\ p_2, p_3, p_4;\ p_3, p_4, p_5;\ p_4, p_5, p_6;\ p_5, p_6, p_1;$

II. $p_1, p_2, p_3;\ p_2, p_3, p_4;\ p_3, p_4, p_5;\ p_6, p_4, p_1;\ p_6, p_1, p_5;\ p_6, p_5, p_2;$

III. $p_1, p_2, p_3;\ p_2, p_3, p_4;\ p_3, p_4, p_5;\ p_4, p_5, p_1;$
$p_6, p_1, p_3;\ p_6, p_1, p_4;\ p_6, p_2, p_5;$

IV. $p_3, p_1, p_4;\ p_1, p_4, p_2;\ p_4, p_2, p_5;\ p_2, p_5, p_3;\ p_5, p_3, p_1;$
$p_6, p_1, p_2;\ p_6, p_2, p_3;\ p_6, p_3, p_4;\ p_6, p_4, p_5;\ p_6, p_5, p_1.$

Die Punktsysteme der gleichen Gruppierung von Fundamentaltripeln konstituieren eine Klasse äquivalenter, d. h. solcher Gebilde, welche unter Erhaltung des allgemeinen Charakters durch passende stetige Bewegungen ihrer Elemente mit einander zur Deckung gebracht werden. Sie besitzen ein und dasselbe bis auf den Drehungssinn des einzelnen Index unzweideutig bestimmte Indexsystem.

Gemäfs den verschiedenen für die Fundamentaltripel einer Verkettung wählbaren Charakteristikenreihen sondern sich die Individuen einer Klasse selbst wieder in mehrere getrennte Kontinuen isothetischer Gebilde, und zwar die Mitglieder der beiden Klassen

I. $\mathfrak{P}_6$ und IV. $\mathfrak{P}_6$

in je vier, die der beiden anderen

II. $\mathfrak{P}_6$ und III. $\mathfrak{P}_6$

in je zehn. Insgesamt existieren daher 28 allothetische Anordnungen von sechs lineal unabhängigen Punkten der Ebene.

In den Klassen III. $\mathfrak{P}_6$ und IV. $\mathfrak{P}_6$ herrscht zwischen den Charakteristikenreihen der Fundamentaltripel und den Systemen der Indices jeder beliebigen Punktgruppe eine eindeutig umkehrbare Abhängigkeit. Das Gleiche gilt innerhalb gewisser acht Unterkontinuen der Klasse II. $\mathfrak{P}_6$ und in einem der Klasse I. $\mathfrak{P}_6$.

Dagegen definieren die Charakteristiken der Fundamentaltripel
1) in den noch übrigen zwei Unterkontinuen der Klasse II. $\mathfrak{P}_6$ zwei —
2) in den drei weiteren

$$I_2.\ \mathfrak{P}_6, \qquad I_3.\ \mathfrak{P}_6, \qquad I_4.\ \mathfrak{P}_6$$

der Klasse I. $\mathfrak{P}_6$ aber resp.

zwei, zwei und drei

Indexsysteme allothetischer Punktgruppen.

Der Charakter oder das Indexsystem eines lineal unabhängigen Punktgebildes $\mathfrak{P}_6$ wird daher ganz allgemein durch die Art der Verkettung seiner den Charakteristiken und Hauptpunkten nach wohl definierten Fundamentaltripel vollkommen und unzweideutig bestimmt.

Der § 10 endlich giebt eine Beschreibung der verschiedenen singulären Systeme $\mathfrak{P}_6$ und ihres gegenseitigen Zusammenhanges.

Die allgemeine und fundamentale Frage, ob der Charakter oder das Indexsystem eines beliebigen allgemeinen Punktgebildes $\mathfrak{P}_n$ durch die Gruppe seiner vollkommen definierten Fundamentaltripel eindeutig bestimmt sei oder nicht, deren vollständige Beantwortung den Inhalt der vier letzten Paragraphen des Abschnittes bildet, wird man in Anbetracht der über die Punktsysteme $\mathfrak{P}_6$ abgeleiteten Sätze a priori so formulieren:

1) Stimmen zwei allgemeine Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n' \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_n' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_n'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \ldots, \mathfrak{p}_n''$$

mit korrespondierenden Fundamentaltripeln

$$\mathfrak{p}_{i_h}', \mathfrak{p}_{k_h}', \mathfrak{p}_{l_h}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{i_h}'', \mathfrak{p}_{k_h}'', \mathfrak{p}_{l_h}''$$
$$(h = 1, 2, 3, \ldots, \nu)$$

von gleichen Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_{i_h}', \mathfrak{p}_{k_h}', \mathfrak{p}_{l_h}') = c(\mathfrak{p}_{i_h}'', \mathfrak{p}_{k_h}'', \mathfrak{p}_{l_h}'')$$

und entsprechenden Hauptpunkten

$$\mathfrak{p}_{i_h}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{i_h}''$$

allgemein auch in den Indices korrespondierender Elemente überein?

Dieselbe entscheidet sich offenbar zugleich mit der anderen:

2) Besitzen zwei allgemeine Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n' \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_n' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_n'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \ldots, \mathfrak{p}_n''$$

mit den Indexsystemen

$$'J(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{p}_{a_1}', \ \mathfrak{p}_{a_2}', \ \mathfrak{p}_{a_3}', \ \ldots, \qquad 'J(\mathfrak{p}_1'') = \mathfrak{p}_{\alpha_1}'', \ \mathfrak{p}_{\alpha_2}'', \ \mathfrak{p}_{\alpha_3}'', \ \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_2') = \mathfrak{p}_{b_1}', \ \mathfrak{p}_{b_2}', \ \mathfrak{p}_{b_3}', \ \ldots, \qquad 'J(\mathfrak{p}_2'') = \mathfrak{p}_{\beta_1}'', \ \mathfrak{p}_{\beta_2}'', \ \mathfrak{p}_{\beta_3}'', \ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_n') = \mathfrak{p}_{r_1}', \ \mathfrak{p}_{r_2}', \ \mathfrak{p}_{r_3}', \ \ldots, \qquad 'J(\mathfrak{p}_n'') = \mathfrak{p}_{\varrho_1}'', \ \mathfrak{p}_{\varrho_2}'', \ \mathfrak{p}_{\varrho_3}'', \ \ldots,$$

wo unter allgemeiner Annahme gleicher Suffixe

$$a_1 = \alpha_1, \quad b_1 = \beta_1, \quad \ldots, \quad r_1 = \varrho_1$$

für die Anfangselemente entsprechender Indices in mindestens einem Paare solcher

$$'J(\mathfrak{p}_k') \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_k'')$$

zwei an entsprechenden Stellen stehende Elemente

$$\mathfrak{p}_{k_h}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{\varkappa_h}''$$

verschiedene Suffixe aufweisen

$$k_h \neq \varkappa_h,$$

stets ein Paar korrespondierender Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_i', \ \mathfrak{p}_k', \ \mathfrak{p}_l' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i'', \ \mathfrak{p}_k'', \ \mathfrak{p}_l'',$$

welche entweder in den Charakteristiken oder in den Hauptpunkten oder in den einen wie in den anderen differieren?

Die Behandlung des Problemes in der zweiten Fassung verlangt je nach den Verschiedenheiten der verglichenen Indexsysteme auch veränderte Schlufsweisen, und zwar unterscheidet sie die beiden Hauptfälle:

1) wo alle Unterschiede in den Elementefolgen entsprechender Indices lediglich aus dem Wechsel der Drehungsrichtungen entspringen,
2) wo besagte Unterschiede für mindestens ein Paar entsprechender Indices

$$J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_{k_1}', \ \mathfrak{p}_{k_2}', \ \mathfrak{p}_{k_3}', \ \ldots \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_k'') = \mathfrak{p}_{\varkappa_1}'', \ \mathfrak{p}_{\varkappa_2}'', \ \mathfrak{p}_{\varkappa_3}'', \ \ldots$$
$$(k_1 = \varkappa_1)$$

unabhängig von deren Drehungssinn gelten, so dafs weder die Gleichung

$$k_h = \varkappa_h$$

noch die andere

$$k_h = \varkappa_{n+2-h}$$

für jedes beliebige h erfüllt ist.

Der erste Fall erledigt sich leicht mit Hilfe des folgenden allgemeinen Satzes:

Wenn für zwei Punktsysteme

$$\mathfrak{P}'_n \equiv \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_n \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}''_n \equiv \mathfrak{p}''_1, \ldots, \mathfrak{p}''_n$$

die Indices entsprechender Punkte

$$\mathfrak{p}'_h \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}''_h$$

der Gruppen

$$\mathfrak{P}'_m \equiv \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}''_m \equiv \mathfrak{p}''_1, \ldots, \mathfrak{p}''_m$$

ganz analog gebildet sind

$$'J(\mathfrak{p}'_h) = \mathfrak{p}'_{h_1}, \mathfrak{p}'_{h_2}, \mathfrak{p}'_{h_3}, \ldots \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}''_h) = \mathfrak{p}''_{h_1}, \mathfrak{p}''_{h_2}, \mathfrak{p}''_{h_3}, \ldots,$$

und wenn die Indices entsprechender Elemente

$$\mathfrak{p}'_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}''_i$$

der restierenden Gruppen

$$\mathfrak{P}'_{n-m} \equiv \mathfrak{p}'_{m+1}, \ldots, \mathfrak{p}'_n \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}''_{n-m} \equiv \mathfrak{p}''_{m+1}, \ldots, \mathfrak{p}''_n$$

sich nur im Drehungssinn unterscheiden

$$'J(\mathfrak{p}'_i) = \mathfrak{p}'_{i_1}, \mathfrak{p}'_{i_2}, \mathfrak{p}'_{i_3}, \ldots \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}''_i) = \cdots, \mathfrak{p}''_{i_3}, \mathfrak{p}''_{i_2}, \mathfrak{p}''_{i_1},$$

so giebt es in den Ebenen der beiden Punktsysteme allemal zwei Geraden

$$g' \text{ und } g'',$$

welche dieselben in zwei Gruppen teilen:

$$\mathfrak{P}'_m \mid \mathfrak{P}'_{n-m} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}''_m \mid \mathfrak{P}''_{n-m}.$$

Indem man die für das sechspunktige System eingeführten Begriffe äquivalenter und isothetischer Punktegruppen allgemein anwendet, leitet man aus Vorstehendem leicht den anderen Satz ab:

In zwei äquivalenten, aber nicht isothetischen Punktegruppen

$$\mathfrak{P}'_n \equiv \mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_n \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}''_n \equiv \mathfrak{p}''_1, \ldots, \mathfrak{p}''_n$$

giebt es mindestens ein Paar entsprechender Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}'_i, \mathfrak{p}'_k, \mathfrak{p}'_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}''_i, \mathfrak{p}''_k, \mathfrak{p}''_l,$$

welche entweder in den Charakteristiken nicht übereinstimmen oder doch in den Hauptpunkten nicht korrespondieren.

Gleichzeitig findet man

Theorem 12: Ist unter den $2^{(n)}$ formal bestimmten Indexsystemen

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), \ldots, J(\mathfrak{p}_n)$$

irgend eines realisierbar durch ein Punktesystem

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n,$$

so kommt diese Eigenschaft allemal noch ebenso vielen anderen zu, als eine in der Ebene von $\mathfrak{P}_n$ bewegte Gerade verschiedene Lagen zu letzterem annehmen kann.

Den zweiten Hauptfall betreffend wird man mit bezug auf das im ersten erlangte Resultat sich von vorneherein die Aufgabe stellen, nachzuweisen, dafs durch die Inäquivalenz der Indexsysteme

$$'J(\mathfrak{p}_h') \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_h'')$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n)$$

zweier allgemeinen Punktegruppen

$$\mathfrak{P}_n' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_n''$$

stets auch die Inäquivalenz der Systeme ihrer Fundamentaltripel bedingt ist. Dieser Zusammenhang mufs aber in dem Mafse klarer hervortreten, als es gelingt, die charakteristischen Abweichungen der beiden Indexsysteme von einander zu analysieren.

Wie ohne weiteres einzusehen, führt jede stetige und endliche Translation zweier derselben Ebene angehörigen inäquivalenten Punktegruppen in einander zu einer Verbindung

$$\mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}_n', \mathfrak{P}_n'', \ldots, \mathfrak{P}_n^{(m)}, \bar{\mathfrak{P}}_n,$$

in welcher je zwei benachbarte Gruppen durch die Inversion eines einzigen Fundamentaltripels, und folglich die ihnen entsprechenden Indexsysteme durch einen irreducibeln Elementwechsel unterschieden sind.

Hieraus ergiebt sich als natürliche Quelle der gesuchten Analyse die Lösung der Aufgabe:

Aus den formalen Verschiedenheiten zweier gegebenen Indexsysteme

$$\text{I.} \quad 'J(\mathfrak{p}_1), 'J(\mathfrak{p}_2), \ldots, 'J(\mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad \bar{\text{I}}. \quad '\bar{J}(\mathfrak{p}_1), '\bar{J}(\mathfrak{p}_2), \ldots, '\bar{J}(\mathfrak{p}_n)$$

eine Folge von nacheinander möglichen Elementwechseln abzuleiten, welche das erste in das zweite umformen.

Dieses Problem führt in allen Phasen seiner Behandlung auf die Grundoperation der entsprechenden Umwandlung einer beliebigen in ein Fundamentaltripel, welche ihrerseits auf gewissen aus den Bildungsgesetzen des Indexsystemes zu folgernden allgemeinen Bestimmungsweisen solcher Tripel beruht.

Das Endergebnis der ziemlich verwickelten, den bei weitem gröfseren Teil des § 11 ausfüllenden Untersuchungen ist das

Theorem 15: Sind zwei inäquivalente, in allen ihren Elementequadrupeln geometrisch-deutige Indexsysteme gegeben durch

$$\text{I} \equiv 'J(\mathfrak{p}_1'), 'J(\mathfrak{p}_2'), \ldots, 'J(\mathfrak{p}_n') \quad \text{und} \quad \bar{\text{I}} \equiv '\bar{J}(\mathfrak{p}_1), '\bar{J}(\mathfrak{p}_2), \ldots, '\bar{J}(\mathfrak{p}_n),$$

so liefert allemal ein wohlbestimmtes Verfahren zwischen beiden eine Verbindungskette von paarweise gleichfalls inäquivalenten Systemen

$$\mathrm{I},\ \mathrm{I}',\ \mathrm{I}'',\ \ldots,\ \mathrm{I}^{(\varrho)},\ \bar{\mathrm{I}},$$

in welcher zwei benachbarte Systeme durch die endliche und eindeutige Inversion eines einzigen Fundamentaltripels unterschieden sind.

In § 12 wird zunächst ein neues wesentlich einfacheres Transformationsverfahren zweier beliebigen Indexsysteme in einander entwickelt. Dasselbe führt zu den allgemeinen und fundamentalen Sätzen:

Theorem 15a. Jedes charakterisierte Indexsystem

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_n)$$

läfst sich in irgend ein anderes

$$\bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ \bar{J}(\mathfrak{p}_n)$$

durch die Inversionen einer bestimmten Folge von Fundamentaltripeln überführen;

Theorem 16. Jedes charakterisierte Indexsystem involviert $1 + \frac{1}{2}n(n-1)$ bestimmte Darstellungen des speziellen Charakters, dafs innerhalb einer jeden die Gruppe der Elementetripel vollkommen und unzweideutig definiert ist.

Noch ein zweites bereits in § 5 und § 7 behandeltes allgemeines Problem findet durch das abgekürzte Transformationsverfahren seine endgültige Erledigung, nämlich die Frage nach den zwischen den Indices eines Systemes bestehenden gegenseitigen Abhängigkeiten.

Man deduziert den Satz:

Wenn zwei Indexsysteme

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad \bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ \bar{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ \bar{J}(\mathfrak{p}_n)$$

in m Paaren entsprechender Indices übereinstimmen,

$$J(\mathfrak{p}_1) = \bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2) = \bar{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_m) = \bar{J}(\mathfrak{p}_m),$$

in den $n - m$ anderen aber abweichen,

$$J(\mathfrak{p}_{m+h}) \neq \bar{J}(\mathfrak{p}_{m+h}),$$

so existiert in dem einen wie in dem anderen mindestens je ein aus drei Elementen

$$\mathfrak{p}_{m+i},\ \mathfrak{p}_{m+k},\ \mathfrak{p}_{m+l}$$

gebildetes Fundamentaltripel;

und aus demselben die bemerkenswerten Theoreme:

17. Teilt man unter Annahme eines beliebigen Indexsystemes

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_n)$$

die Elemente $\mathfrak{p}_i$ so in zwei Gruppen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m+2}, \ldots, \mathfrak{p}_n,$$

dafs einerseits zu jedem Elemente der ersten Gruppe mindestens ein Fundamentaltripel gehört, welches zwei Elemente der zweiten Gruppe enthält, andererseits in jedem Fundamentaltripel mindestens ein Element der ersten Gruppe vertreten ist, so werden durch die m Indices

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), \ldots, J(\mathfrak{p}_m)$$

die $n - m$ übrigen

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}), J(\mathfrak{p}_{m+2}), \ldots, J(\mathfrak{p}_n)$$

bis auf ihre Drehungsrichtungen eindeutig bestimmt;

17 a. In jedem allgemeinen Indexsysteme von n Elementen giebt es stets $E(\sqrt{n})$ Indices, welche durch die übrigen bis auf den Drehungssinn unzweideutig fixiert sind.

Den Gegenstand des § 13 bildet die Behandlung des fundamentalen Problemes:

Gegeben seien zwei inäquivalente allgemeine Indexsysteme

$$\text{I)}\ J(\mathfrak{p}_1'), J(\mathfrak{p}_2'), \ldots, J(\mathfrak{p}_n') \quad \text{und} \quad \overline{\text{I}})\ \overline{J}(\mathfrak{p}_1), \overline{J}(\mathfrak{p}_2), \ldots, \overline{J}(\mathfrak{p}_n)$$

durch die in erweitertem Sinne geometrisch deutigen Schemata:

$$\begin{aligned}
&\text{I}')\ {}'J(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_n', && \overline{\text{I}}')\ {}'\overline{J}(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_n \\
&\quad {}'J(\mathfrak{p}_2') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_3}', \mathfrak{p}_{a_4}', \ldots, \mathfrak{p}_{a_n}' && \quad {}'\overline{J}(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{\alpha_3}, \mathfrak{p}_{\alpha_4}, \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_n}, \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots, && \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\quad {}'J(\mathfrak{p}_n') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{r_3}', \mathfrak{p}_{r_4}', \ldots, \mathfrak{p}_{r_n}' && \quad {}'\overline{J}(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{\varrho_3}, \mathfrak{p}_{\varrho_4}, \ldots, \mathfrak{p}_{\varrho_n},
\end{aligned}$$

$$c(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i+h}') = + 1 = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+h}).$$

Es soll gezeigt werden, dafs diese Darstellungen auch stets inäquivalente Gruppen von Fundamentaltripeln definieren.

Die Beweisführung stützt sich auf einige allgemeine Eigenschaften einer beliebigen das Schema I′ in das andere I′ transformierenden Folge endlicher und eindeutiger Inversionen

$$\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_\varrho'.$$

Jede solche Reihe setzt sich aus zwei Kategorieen von Elementwechseln zusammen, einerseits aus wesentlichen, d. h. denjenigen, welche einen zwischen entsprechenden Indices

$${}'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \ldots, \mathfrak{p}_k', \ldots \quad \text{und} \quad {}'\overline{J}(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k, \ldots, \mathfrak{p}_l, \ldots$$

von vorneherein bestehenden Unterschied der Elementanordnungen ausgleichen, andererseits aus unwesentlichen, d. h. denjenigen, welche im Gefolge eines derartigen Ausgleiches auftreten.

Betreffs derselben ergeben einfache Überlegungen die Sätze:

1) Die Gesamtzahl der in den $n - 1$ Paaren zugeordneter Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \ldots, \mathfrak{p}_k', \ldots \quad \text{und} \quad '\overline{J}(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k, \ldots, \mathfrak{p}_l, \ldots$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n)$$

vorhandenen Inversionen

$$1, l, k \quad \text{und} \quad 1, k, l$$

stellt allemal ein Multiplum von 3 dar;

2) in einer beliebigen das eine in das andere System transformierenden Folge von Inversionen

$$\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_\varrho'$$

tritt eine wesentliche stets in ungerader, eine unwesentliche stets in gerader Zahl von Wiederholungen auf.

Die hier getroffene Unterscheidung wesentlicher und unwesentlicher Inversionen in obiger Elementartransformation findet ihre Begründung in dem Satze:

Jede durch ein Paar aufeinander folgender Elementwechsel desselben Tripels

$$\mathfrak{T}_a \equiv \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \equiv \mathfrak{T}_b$$

bestimmte Verbindungskette

$$\mathfrak{T}_a, \mathfrak{T}_{a+1}, \ldots, \mathfrak{T}_{b-1}, \mathfrak{T}_b$$

kann durch eine ihr äquivalente andere ersetzt werden

$$\mathfrak{T}_{a+1}', \ldots, \mathfrak{T}_a, \mathfrak{T}_b, \ldots, \mathfrak{T}_{b-1}',$$

aus welcher die nun benachbarten Inversionen $\mathfrak{T}_a'$, $\mathfrak{T}_b'$ als sich entgegengesetzt ausscheiden.

Der Beweis wird mit Hülfe der sogenannten Intermediärgruppen geführt. Dieselben sind definiert durch die Beziehung:

Wenn unter den Tripeln der Inversionenfolgen

$$\mathfrak{T}_a, \mathfrak{T}_{a+1}, \ldots, \mathfrak{T}_{b-1}, \mathfrak{T}_b$$
$$(\mathfrak{T}_a \ldots \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots \mathfrak{T}_b)$$

eines der Form auftritt

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b},$$

so sind allemal auch die Bildungen enthalten:

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{a}, \mathfrak{c} \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$$

Da die Reduktion der betrachteten Inversionenfolge mit der wachsenden Anzahl m ihrer Intermediärgruppen

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_i; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_i; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_i$$

sich mehr und mehr kompliziert, wird das bezügliche Verfahren zuerst für die speziellen Fälle $m = 2, 3$ entwickelt und dann mittelst Induktion verallgemeinert. Man gelangt durch wiederholte Anwendung des Satzes zu dem wichtigen

Theorem 18: Jede beliebige zwei inäquivalente Indexsysteme

$$'J(\mathfrak{p}_1),\ 'J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_1),\ '\overline{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ '\overline{J}(\mathfrak{p}_n)$$
$$- c(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k) = \overline{c}(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k) -$$

in einander transformierende Inversionenfolge läfst sich in eine irreduzible d. h. eine solche Reihe umformen, welche nur noch die wesentlichen Inversionen und zwar jede genau einmal enthält.

Diese fundamentale Eigenschaft der aufgestellten Inversionenfolge gestattet in Verbindung mit Früherem die wichtigen Folgerungen:

Theorem 18a. Die Anzahl der Inversionen jeder Folge von verschiedenen nach einander hervortretenden Fundamentaltripeln, durch welche zwei gegebene inäquivalente Indexsysteme des angegebenen Charakters in einander elementar übergeführt werden, ist eine von der Bildungsweise der Folge unabhängige invariante Zahl, das sogenannte Mafs der Inäquivalenz beider Systeme;

und 18b. Zwei in einem Paare entsprechender Indices und in den Charakteristiken der korrespondierenden Tripel des betreffenden Elementes übereinstimmende inäquivalente Indexsysteme

$$\text{I. } 'J(\mathfrak{p}_1),\ 'J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad \overline{\text{I}}.\ 'J(\mathfrak{p}_1),\ '\overline{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ '\overline{J}(\mathfrak{p}_n)$$
$$- c(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k) = \overline{c}(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k) -$$

besitzen stets inäquivalente Gruppen von Fundamentaltripeln.

Definiert man ganz allgemein als inäquivalent zwei Schemata

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ \overline{J}(\mathfrak{p}_n),$$

welche bei jeder innerhalb des einen ausgeführten Permutation der Elemente

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n$$

mindestens rücksichtlich eines Paares entsprechender Indices differieren, die Drehungsrichtungen letzterer sind hierbei irrelevant, so kann man, wie weiter gezeigt wird, an Stelle des speziellen Theoremes (18b) das allgemeinere formulieren:

Theorem 19. Inäquivalente Indexsysteme besitzen stets inäquivalente Gruppen von Fundamentaltripeln.

Hieraus aber resultiert unter Mitberücksichtigung älterer Be-

ziehungen als Endergebnis der gesamten Untersuchung der allgemeine und fundamentale Satz:

Theorem 20. Ein Indexsystem ist durch die Gruppe seiner vollständig definierten Fundamentaltripel unzweideutig bestimmt.

Auf die geometrische Darstellung übertragen, lauten die beiden letzten Sätze:

19a. Zwei allgemeine ebene Punktsysteme mit differierenden Indexsystemen besitzen stets inäquivalente Gruppen von Fundamentaltripeln;

und 20a. Ein allgemeines ebenes Punktsystem ist durch die Gruppe seiner nach Charakteristiken und Hauptpunkten gegebenen Fundamentaltripel vollkommen und unzweideutig definiert.

Aus der Auffassung eines singulären ebenen Punktsystemes als des gemeinsamen Grenzfalles mehrerer allgemeinen Systeme und aus seiner stets möglichen Rückbildung in letztere folgt unmittelbar der unbeschränkte Geltungsbereich der gewonnenen Resultate.

Die Theorie des gegebenen endlichen Punktsystemes findet mit § 14 ihren Abschlufs in der vollständigen Bestimmung eines Indexsystemes aus der Gruppe seiner Fundamentaltripel, für welche allgemeine Methoden entwickelt und an Beispielen erläutert werden.

Der Nachweis, dafs ein den in Theorem (6) enthaltenen Grundgesetzen des Indexsystemes genügendes formales Schema

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_n)$$

auch stets durch ein Punktsystem $\mathfrak{P}_n$ realisierbar sei, mufste als auf den bisherigen völlig heterogenen Grundlagen, nämlich auf Kontinuitätsbetrachtungen basierend, auf den zweiten Band der Grundgebilde verwiesen werden.

Königsberg, im Dezember 1894.

V. Eberhard.

Inhalt.

Seite

Vorrede über die Grundlagen und Ziele der Raumlehre . . . . . I—XLVII

Erster Abschnitt.

Das endliche ebene Punktsystem in allgemeinster und ursprünglichster Anschauung.

§ 1. Der Charakter des ebenen Punktsystemes 1
§ 2. Endliche ebene Punktsysteme 9
§ 3. Das Indexsystem 14
§ 4. Primäre Punktgruppen 34
§ 5. Abhängigkeiten zwischen den Indices der Elemente eines Punktsystemes 45
§ 6. Die Grundgesetze des Indexsystemes 74
§ 7. Fundamentaltripel und Fundamentalreihen 90
§ 8. Beschreibung der einfachsten Punktsysteme aus ihren Funtamentaltripeln 121
§ 9. Das Punktsystem $\mathfrak{P}_6$ 134
§ 10. Die singulären Punktsysteme $\mathfrak{P}_6$ 173
§ 11. Die Inäquivalenz äquivalenter, aber allothetischer Punktgruppen in den Systemen ihrer Fundamentaltripel. Erweiterte geometrisch-deutige Indexsysteme und ihre Elementartransformationen in einander 180
§ 12. Die Elementartransformationen eines allgemeinen Indexsystemes und dessen geometrisch-deutige Auffassungen. Fundamentale Indicesgruppen 224
§ 13. Die eindeutige Abhängigkeit eines willkürlichen Indexsystemes von der Gruppe seiner Funtamentaltripel 236
§ 14. Vollständige Konstruktion eines Indexsystemes aus der Gruppe seiner Fundamentaltripel 272

Anhang.

§ 15. Das endliche ebene Geradensystem 280
§ 16. Gemischte Grundgebilde 289

Erster Abschnitt.

Das endliche ebene Punktsystem in allgemeinster und ursprünglichster Anschauung.

§ 1. Der Charakter des ebenen Punktsystemes.

Ein in einer Ebene beliebig fixierter Komplex diskreter Punkte

$$\mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{P}_2,\ \mathfrak{P}_3,\ \mathfrak{P}_4,\ \ldots$$

stellt ein ebenes Punktsystem dar, wenn unter allen möglichen Kombinationen

$$\mathfrak{P}_i,\ \mathfrak{P}_k,\ \mathfrak{P}_l$$

mindestens eine von der Beschaffenheit vorhanden ist, dafs ihre drei Elemente die gegebene Ebene als diejenige des Punktsystemes festlegen.

Die hierdurch getroffene Unterscheidung zweier Erscheinungsformen des Punktetripels,

1) des allgemeinen oder des die Ebene bestimmenden,

2) des besonderen oder des lineal abhängigen,

läfst die erstere als die einfachste oder als die Stammform eines ebenen Punktsystemes erkennen.

Es sollen alle diejenigen Lagenverhältnisse in einem zusammengesetzten Systeme

$$\mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{P}_2,\ \mathfrak{P}_3,\ \mathfrak{P}_4,\ \ldots,$$

welche in erster und ursprünglichster Form schon in den einzelnen Punktetripeln

$$\mathfrak{P}_i,\ \mathfrak{P}_k,\ \mathfrak{P}_l$$

als in seinen nicht weiter zerlegbaren, ihm gleichartigen Bestandteilen zur Anschauung kommen, als mafsgebend für die erste Stufe in dem Charakter des Punktsystemes betrachtet werden.

Die Anschauung fafst an einem aus dem gegebenen Punktsysteme willkürlich herausgegriffenen allgemeinen Tripel

$$\mathfrak{P}_l,\ \mathfrak{P}_k,\ \mathfrak{P}_l$$

zwei wesentlich verschiedene Kategorieen von Eigenschaften auf:

1) innere oder absolute, nämlich solche, welche lediglich auf der gegenseitigen Lage der Punkte des Tripels beruhen,

2) äufsere oder relative, nämlich solche, welche die räumliche Stellung des Tripels zu dem Beobachter kennzeichnen.

Die Eigenschaften erster Art sind zusammengefafst in folgenden Sätzen:

Es bestimmen die drei Punkte

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

drei einfache Strahlenbüschel

$$S(\mathfrak{p}_i),\ S(\mathfrak{p}_k),\ S(\mathfrak{p}_l).$$

Dieselben haben paarweise,

$$S(\mathfrak{p}_i) \text{ und } S(\mathfrak{p}_k),\quad S(\mathfrak{p}_k) \text{ und } S(\mathfrak{p}_l),\quad S(\mathfrak{p}_l) \text{ und } S(\mathfrak{p}_i),$$

je eine Gerade gemein,

$$|\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k| = g_l,\quad |\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l| = g_i,\quad |\mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i = g_k.$$

Eine Gerade durch den Punkt $\mathfrak{p}_x$ fixiert einen Punkt auf der Geraden g_x, ein Punkt auf der Geraden g_x festigt eine Gerade durch den Punkt $\mathfrak{p}_x$.

Es wird das Büschel $S(\mathfrak{p}_x)$ durch die Geraden g_y, g_z zerlegt in die Teilbüschel oder Primärwinkel

$$|\mathfrak{p}_x|_1 \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_x|_2,$$

entsprechend die Gerade g_x durch die Punkte $\mathfrak{p}_z$, $\mathfrak{p}_y$ in die Teilstrecken

$$|\mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z|_1 \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z|_2,$$

und zwar projecieren die Strahlen des $\begin{matrix}\text{Innen-}\\ \text{Aufsen-}\end{matrix}$winkels $\begin{matrix}|\mathfrak{p}_x|_1\\ |\mathfrak{p}_x|_2\end{matrix}$ die Punkte der $\begin{matrix}\text{endlichen-}\\ \text{unendlichen-}\end{matrix}$ oder $\begin{matrix}\text{inneren-}\\ \text{äufseren-}\end{matrix}$ Verbindungsstrecke $\begin{matrix}|\mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z|_1\\ |\mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z|_2\end{matrix}$.

Die drei Innenwinkel

$$|\mathfrak{p}_i|_1,\ |\mathfrak{p}_k|_1,\ |\mathfrak{p}_l|_1$$

definieren ein gemeinsames Punktkontinuum

$$\Delta(\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l),$$

begrenzt von den drei endlichen Strecken

$$|\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k|_1,\quad |\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l|_1,\quad |\mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i|_1.$$

Die drei Aufsenstrecken

$$|\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l|_2,\quad |\mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i|_2,\quad |\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k|_2$$

definieren ein gemeinsames Strahlenkontinuum

$$\mathfrak{p}_\infty\,|\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,$$

begrenzt von den drei Aufsenwinkeln

$$|\mathfrak{p}_i|_2,\quad |\mathfrak{p}_k|_2,\quad |\mathfrak{p}_l|_2.$$

Dasselbe bildet das Aufsengebiet des Strahlenkontinuums

$$\mathfrak{p}_\infty \,|\, \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l.$$

Ein Innenwinkel und zwei Aufsenwinkel

$$\mathfrak{p}_{i\ 1},\quad |\,\mathfrak{p}_k|_2,\quad |\,\mathfrak{p}_l|_2$$

definieren ein gemeinsames Punktkontinuum

$$|\,\mathfrak{p}_i|_1 - \Delta,$$

begrenzt von einer Innen- und zwei Aufsenstrecken

$$|\,\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_{l\ 1},\quad |\,\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_{l\ 2},\quad |\,\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_{k\ 2}.$$

Dasselbe bildet das Aufsengebiet des Strahlenkontinuums

$$\mathfrak{p}_{i\ ,}\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l.$$

Die 4 Punktkontinuen oder Primärdreiseite

$$\Delta(\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l),$$

$$|\,\mathfrak{p}_i|_1 - \Delta,\quad |\,\mathfrak{p}_k|_1 - \Delta,\quad |\,\mathfrak{p}_l|_1 - \Delta$$

ergeben in ihrer Gesamtausdehnung das vollständige ebene Punktfeld.

Dasselbe bildet das Aufsengebiet des Punktkontinuums

$$\Delta(\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l).$$

Zwei Innenstrecken und eine Aufsenstrecke

$$|\,\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k|_1,\quad |\,\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_l|_1,\quad |\,\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l|_2$$

definieren ein gemeinsames Strahlenkontinuum

$$\mathfrak{p}_i\,|\,\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,$$

begrenzt von einem Aufsen- und zwei Innenwinkeln

$$|\,\mathfrak{p}_i|_2,\quad |\,\mathfrak{p}_k|_1,\quad |\,\mathfrak{p}_l|_1.$$

Dasselbe bildet das Aufsengebiet des Punktkontinuums

$$|\,\mathfrak{p}_i|_1 - \Delta.$$

Die 4 Strahlenkontinuen oder Primärdreiecke

$$\mathfrak{p}_\infty\,|\,\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,$$

$$\mathfrak{p}_i\,|\,\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\quad \mathfrak{p}_k\,|\,\mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i,\quad \mathfrak{p}_l\,|\,\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k$$

ergeben in ihrer Gesamtausbreitung das vollständige ebene Strahlenfeld.

Entsprechend definieren:

1) je drei derselben

a) $|\,\mathfrak{p}_i|_1 - \Delta,\ |\,\mathfrak{p}_k|_1 - \Delta,\ |\,\mathfrak{p}_l|_1 - \Delta,$

b) $\Delta,\quad |\,\mathfrak{p}_x|_1 - \Delta,\quad |\,\mathfrak{p}_y|_1 - \Delta$

das Punktgebiet eines Strahlenkontinuums

a) $\mathfrak{p}_\infty\,|\,\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,$ b) $\mathfrak{p}_z\,|\,\mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_y;$

2) je zwei von ihnen

a) $|\,\mathfrak{p}_x|_1 - \Delta$ und $|\,\mathfrak{p}_y|_1 - \Delta,$

b) Δ und $|\,\mathfrak{p}_x|_1 - \Delta$

die Deckungsfläche zweier Primärdreiecke

a) $\mathfrak{p}_\infty\,|\,\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$ und $\mathfrak{p}_z\,|\,\mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_y,$

b) $\mathfrak{p}_y\,|\,\mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_z$ und $\mathfrak{p}_z\,|\,\mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_y,$

1) je drei derselben

a) $\mathfrak{p}_i\,|\,\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\quad \mathfrak{p}_k\,|\,\mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i,\quad \mathfrak{p}_l\,|\,\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,$

b) $\mathfrak{p}_\infty\,|\,\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_x\,|\,\mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_y\,|\,\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_z$

das Strahlengebiet eines Punktkontinuums

a) $\Delta(\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l),$ b) $|\,\mathfrak{p}_z|_1 - \Delta;$

2) je zwei von ihnen

a) $\mathfrak{p}_x\,|\,\mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z$ und $\mathfrak{p}_y\,|\,\mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_z,$

b) $\mathfrak{p}_\infty\,|\,\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$ und $\mathfrak{p}_x\,|\,\mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z$

die Gesamtfläche zweier Primärdreiseite

a) Δ und $|\,\mathfrak{p}_z|_1 - \Delta,$

b) $|\,\mathfrak{p}_y|_1 - \Delta$ und $|\,\mathfrak{p}_z|_1 - \Delta,$

nämlich das Primärzweiseit

a) $|\mathfrak{p}_z|_2$, b) $|\mathfrak{p}_x|_1$;

3) jede einzelne Fläche

a) $\Delta(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l)$, b) $|\mathfrak{p}_x|_1 - \Delta$

den gemeinsamen Deckungsbereich dreier Strahlenkontinuen

a) $\mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$, $\mathfrak{p}_k|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l$, $\mathfrak{p}_l|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$,
b) $\mathfrak{p}_y|\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_z$, $\mathfrak{p}_z|\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_\infty|\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z$.

nämlich das Primärzweiseit

a) $|\mathfrak{p}_z|_1$, b) $|\mathfrak{p}_x|_2$;

3) jeder einzelne Bereich

a) $\mathfrak{p}_x|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$, b) $\mathfrak{p}_x|\mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z$

die Ausbreitungsfläche dreier Punktkontinuen

a) $|\mathfrak{p}_i|_1 - \Delta$, $|\mathfrak{p}_k|_1 - \Delta$, $|\mathfrak{p}_l|_1 - \Delta$,
b) Δ, $|\mathfrak{p}_y|_1 - \Delta$, $|\mathfrak{p}_z|_1 - \Delta$.

Die $2 \cdot 4$ Primärgebilde gruppieren sich also zu vier Paaren einander ausschliefsender reciproker Primärdreiseite und Primärdreiecke

1) $\Delta(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l)$; $\mathfrak{p}_\infty|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$'

2) $|\mathfrak{p}_i|_1 - \Delta$; $\mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$'

3) $|\mathfrak{p}_k|_1 - \Delta$; $\mathfrak{p}_k|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l$'

4) $|\mathfrak{p}_l|_1 - \Delta$; $\mathfrak{p}_l|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$'

welche vereinigt die volle Ebene sowohl als Punkt- wie als Strahlenfeld darstellen.

Jedes Primärdreiseit bestimmt ein solches zweidimensionales Punktkontinuum, dessen Elemente aufserhalb der drei Geraden

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|, \quad |\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|, \quad |\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i|$$

stetig in einander übergehen können.

Ein beliebiger Innenpunkt desselben ist Aufsenpunkt des reciproken und Teilpunkt der drei anderen Primärdreiecke, und zwar teilt er in den drei Nebenwinkeln der Grenzwinkel des ersteren je zwei Grenzwinkel der letzteren.

Es teilt daher ein beliebiger Punkt der Ebene in allgemeiner Lage zu dem Geradentripel in bezug auf irgend ein Primärdreieck entweder je zwei oder keinen einzigen Grenzwinkel.

Jedes Primärdreieck bestimmt ein solches zweidimensionales Strahlenkontinuum, dessen Elemente aufserhalb der drei Punkte

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$$

stetig in einander übergehen können.

Ein beliebiger Innenstrahl desselben ist Aufsenstrahl des reciproken und Teilstrahl der drei anderen Primärdreiseite, und zwar teilt er in den drei Nebenstrecken der Grenzstrecken des ersteren je zwei Grenzstrecken der letzteren.

Es teilt daher eine beliebige Gerade der Ebene in allgemeiner Lage zu dem Punktetripel in bezug auf irgend ein Primärdreiseit entweder je zwei oder keine einzige Grenzstrecke.

Endlich kann noch jede Fläche

$$\mathfrak{p}_x|_1 - \Delta$$

als aus zwei durch die unendlich ferne Gerade getrennten Teilflächen bestehend aufgefafst werden, von denen die eine als Seitenfläche

$$F_{y,z},$$

die andere als Scheitelfläche

$$F_x$$

der Dreiecksfläche Δ erscheinen.

Mit den angegebenen sind alle Wahrnehmungen erschöpft, welche das allgemeine Punktetripel an und für sich darbietet. Sie sind für alle solchen Tripel genau dieselben und lassen daher diese ihrem Charakter nach als durchaus gleichwertig erscheinen.

Die noch übrigen, die Beschreibung des Punktetripels abschliefsenden Eigenschaften sind, wie schon bemerkt, relativer Art. Sie hängen nämlich infolge der durch die Ebene bedingten Zweiteilung des Raumes von der Wahl des Beobachtungsortes in der einen oder der anderen Hälfte ab und bringen gewisse, dem gewählten Standorte entsprechende Unterscheidungen der verschiedenen aus den Elementen des Tripels zu bildenden Anordnungen zum Ausdruck.

Der auf einer Seite, der Bildfläche oder dem Operationsfeld der Ebene stehende Beobachter abstrahiert:

1) aus der Fähigkeit der eigenen Vorwärts- und Rückwärtsbewegung von seinem Standort zunächst eine diskrete, dann eine stetige Folge von Standpunkten in einer geradlinigen Reihe mit positiver und negativer Richtung;

2) aus der Fähigkeit der eigenen links- und rechtsseitigen Drehung in einem Standort die Vereinigung zunächst einer diskreten, dann einer stetigen Folge von Richtungen in einem centralen Büschel mit positivem und negativem Drehungssinn.

Ein beliebiges durch den Beobachter so nach Lage und Bewegungsrichtungen wohl definiertes Paar vereinigter reciproker Elemente,

eine Punktreihe g mit einem Punkte $\mathfrak{p}$,	ein einfaches Strahlenbüschel $\mathfrak{p}$ mit einer Geraden g,

und das dadurch in der Ebene mitbestimmte analoge Paar,

die unendlich ferne Punktreihe g_∞ mit dem Punkte $\mathfrak{g}_\infty$,	das Parallelbüschel $\mathfrak{g}_\infty$ mit dem unendlich fernen Strahle g_∞,
teilen das ebene Punktfeld	teilen das ebene Strahlenfeld

in zwei getrennte Kontinuen,

in ein positives

$$+ F(g, g_\infty)$$

und ein negatives

$$- F(g, g_\infty),$$

durchstrichen von einem veränderlichen Halbstrahl bei positiver Drehung um den Punkt $\mathfrak{p}$ aus den Lagen

$$\mathfrak{p}, + \mathfrak{g}_x \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}, - \mathfrak{g}_x$$

in resp. die anderen

$$\mathfrak{p}, - \mathfrak{g}_\infty \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}, + \mathfrak{g}_\infty .$$

in ein positives

$$+ S(\mathfrak{p}, \mathfrak{g}_\infty)$$

und ein negatives

$$- S(\mathfrak{p}, \mathfrak{g}_\infty),$$

durchstrichen von einem veränderlichen Centrum bei positiver Bewegung in der Geraden g aus den Lagen

$$+ \mathfrak{p} \text{ und } - \mathfrak{p}$$

in resp. die anderen

$$+ \mathfrak{g}_\infty \text{ und } - \mathfrak{g}_\infty .$$

Der Übergang aus dem einen in das andere Kontinuum erfolgt durch die Punkte der Reihen

$$g \text{ und } g_\infty .$$

durch die Strahlen der Büschel

$$\mathfrak{p} \text{ und } \mathfrak{g}_x .$$

Dies festgestellt, betrachte man ein allgemeines Punktetripel

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l .$$

Wenn in den drei Geraden

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k| = g_l, \quad |\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l| = g_i, \quad |\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i| = g_k$$

die Richtungen

$$\mathfrak{p}_i \text{---} \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_k \text{---} \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_l \text{---} \mathfrak{p}_i$$

zu positiven gewählt werden, definieren die drei Paare vereinigter Elemente

$$\mathfrak{p}_i, g_l; \quad \mathfrak{p}_k, g_i; \quad \mathfrak{p}_l, g_k$$

in der Ebene $3 \cdot 2$ Kontinuen:

$$+ F_l, - F_l; \quad + F_i, - F_i; \quad + F_k, - F_k,$$
$$+ S_l, - S_l; \quad + S_i, - S_i; \quad + S_k, - S_k .$$

Dann aber liefert die Anschauung betreffs der Verteilung der Elemente

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l \qquad\qquad g_i, g_k, g_l$$

auf die respektiven Gebiete

$$\pm F_i, \pm F_k, \pm F_l \qquad\qquad \pm S_i, \pm S_k, \pm S_l$$

unmittelbar die Unterscheidungen:

1) entweder sind alle Elemente in den entsprechenden positiven Kontinuen gelegen,

2) oder sie sind sämtlich in den entsprechenden negativen enthalten.

Demgemäfs sollen die drei cyklischen Folgen

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l;\quad \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i;\quad \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k$$

resp. als positive oder negative, dagegen die drei anderen

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_k;\quad \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_i;\quad \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_l$$

resp. als negative oder positive Anordnungen aufgefafst, und ihre Charakteristiken durch die Gleichungen definirt werden:

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l) = \mathfrak{c}(\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i) = \mathfrak{c}(\mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k) = \pm 1;$$

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_k) = \mathfrak{c}(\mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_k;\ \mathfrak{p}_i) = \mathfrak{c}(\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_l) = \mp 1.$$

In der Folge sollen

in einem Strahlenbüschel $\mathfrak{p}$ die beiden Arten des links- und rechtsseitigen stetigen Überganges eines Strahles $|\mathfrak{p},\ \mathfrak{q}|$ in einen anderen $|\mathfrak{p},\ \mathfrak{r}|$

in einer Punktreihe g die beiden Arten des endlichen und unendlichen stetigen Überganges eines Punktes $\mathfrak{q}$ in einen anderen $\mathfrak{r}$

respektive durch die Symbole unterschieden werden

$$\mathfrak{p}|\mathfrak{r},\ \mathfrak{q}| \text{ und } \mathfrak{p}|\mathfrak{q},\ \mathfrak{r}|, \qquad \mathfrak{q} \text{ —— } \mathfrak{r} \text{ und } \mathfrak{q} \text{ —— } g_\infty \text{ —— } \mathfrak{r},$$

und zwar mögen dieselben zugleich die von dem bewegten Elemente durchstrichenen Gebiete darstellen.

Zwei allgemeine Punktetripel oder Punktefolgen gleicher Charakteristiken

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l \text{ und } \mathfrak{p}_i',\ \mathfrak{p}_k',\ \mathfrak{p}_l'$$

werden als isothetische Systeme definiert.

Für dieselben gilt der Satz:

Zwei isothetische allgemeine Punktetripel können unter Erhaltung ihres beiderseitigen Charakters stets stetig ineinander übergeführt werden.

Zum Beweise drehe man das als starr gedachte System

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

so um den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$|\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k| \text{ und } |\mathfrak{p}_i',\ \mathfrak{p}_k'|,$$

dafs diese sowohl ihren Lagen als ihren entsprechenden Richtungen nach zusammenfallen. Eine weitere endliche Parallelverschiebung des Systemes längs der Geraden

$$|\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k| \equiv |\mathfrak{p}_i',\ \mathfrak{p}_k'|$$

wird die beiden Punkte

$$\mathfrak{p}_i \text{ und } \mathfrak{p}_i',$$

eine darauf erfolgende Bewegung des Punktes $\mathfrak{p}_k$ auf der $\mathfrak{p}_i$ nicht enthaltenden endlichen Strecke $\overline{\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_k'}$ die beiden Punkte

$$\mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k',$$

endlich eine Verrückung des Punktes $\mathfrak{p}_l$ auf der zu einer Seite der Geraden $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$ gelegenen Strecke $\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_l'$ die Punkte

$$\mathfrak{p}_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_l'$$

zu je einem Punkte vereinigen.

Die angegebene kontinuierliche Überführung der drei Punkte

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

in die drei entsprechenden

$$\mathfrak{p}_i', \quad \mathfrak{p}_k', \quad \mathfrak{p}_l'$$

genügt den beiden Bedingungen, dafs erstere während ihrer Bewegung sowohl in allgemeiner Lage als im Endlichen verbleiben. Q. e. d.

Ein besonderes oder lineal abhängiges Punktetripel ist als Tripel unbestimmten Charakters anzusehen, indem einer beliebigen Folge seiner Elemente ebensowohl das positive als das negative Zeichen entspricht. Es wird als Tripel der Charakteristik 0 bezeichnet.

In einem solchen singulären Tripel

$$\mathfrak{p}_i \text{ —— } \mathfrak{p}_k \text{ —— } \mathfrak{p}_l$$

teilt allemal ein Punkt

$$\mathfrak{p}_k$$

die endliche Verbindungsstrecke der beiden anderen

$$\mathfrak{p}_i \text{ —— } \mathfrak{p}_l.$$

Demgemäfs reduziert sich der primäre Strahlenbereich

$$\mathfrak{p}_k \,|\, \mathfrak{p}_i, \; \mathfrak{p}_l$$

auf die einzige Gerade

$$|\mathfrak{p}_i, \; \mathfrak{p}_l|,$$

während die drei anderen

$$\mathfrak{p}_i \,|\, \mathfrak{p}_k; \quad \mathfrak{p}_l \,|\, \mathfrak{p}_k; \quad \mathfrak{p}_\infty \,|\, \mathfrak{p}_i, \; \mathfrak{p}_l$$

in derselben Geraden einen gemeinsamen Grenzstrahl besitzen.

Zugleich verschwinden die drei Primärflächen

$$|\mathfrak{p}_i|_1 - \Delta, \quad |\mathfrak{p}_l|_1 - \Delta, \quad \Delta,$$

wogegen die vierte

$$|\mathfrak{p}_k|_1 - \Delta$$

sich zur vollen Ausdehnung der Ebene erweitert.

Nunmehr fasse ich in bezug auf irgend ein vorgelegtes ebenes Punktsystem

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_4, \quad \cdots$$

die Gesamtheit der Charakteristiken

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l) = +1, \quad -1, \quad 0$$

aller seiner Punktetripel

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

als das Fundament oder die erste Stufe in dem Charakter des Punktsystems auf.

Indem man das Punktsystem auf eine endliche Anzahl von Elementen beschränkt, bietet diese Definition seines Charakters unmittelbar folgende fundamentale Aufgaben:

1) alle diejenigen Systeme von Punktetripeln zu ermitteln, welche die für die Gesamtheit der Tripel notwendigen und hinreichenden Bestimmungen enthalten;

2) aus einem solchen Fundamentalsysteme von Punktetripeln die Charakteristiken der übrigen abzuleiten.

Die vollständige Erledigung beider Probleme bildet das wichtigste Ziel der weiteren Deduktionen.

§ 2. Endliche ebene Punktsysteme.

Es liege vor das ebene Punktsystem

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n \equiv \mathfrak{P}_n .$$

Die Elemente desselben seien paarweise verbunden durch die Geraden:

$$g_1 = (\mathfrak{p}_1 \quad \mathfrak{p}_2), \ldots, \quad g_{n'} \equiv (\mathfrak{p}_r, \mathfrak{p}_s) .$$

Jede dieser n' Geraden wird mindestens zwei und höchstens $n-1$ Punkte $\mathfrak{p}$ enthalten. Bezeichnet daher μ_h die Anzahl derjenigen Geraden, welche je h Punkte $\mathfrak{p}_i$ verbinden, so gelten die beiden Relationen:

1) $\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \cdots + \mu_{n-1} = n'$,

2) $1 \cdot 2\mu_2 + 2 \cdot 3\mu_3 + 3 \cdot 4\mu_4 + \cdots + (n-2)(n-1)\mu_{n-1} = (n-1) \cdot n$.

Die je drei oder mehr Punkte $\mathfrak{p}$ fassenden Geraden g, die Träger der singulären Punktetripel, sollen selbst singuläre Geraden genannt werden.

Ein beliebiger Punkt $\mathfrak{p}_i$ kann gegenüber dem Systeme $\mathfrak{P}_{n-1}^{(i)}$ der $n-1$ anderen Punkte drei wesentlich verschiedene Lagen einnehmen:

1) Entweder wird er aufserhalb der durch die Punktepaare des Systemes $\mathfrak{P}_{n-1}^{(i)}$ fixierten Geraden $g^{(i)}$ liegen;

2) oder es wird durch ihn eine einzige solche Gerade hindurchgehen;

3) oder es treffen in ihm mindestens zwei dieser Geraden zusammen.

Im ersten Falle ist $\mathfrak{p}_i$ von den übrigen $n-1$ Punkten $\mathfrak{p}$ lineal unabhängig. Die Verbindungsgeraden derselben bestimmen entweder sämtlich oder auch nur teilweise die Grenzseiten einer ihn einschliefsenden Fläche, innerhalb deren jede endliche Bewegung von $\mathfrak{p}_i$ den Charakter des Punktsystemes invariant läfst.

Im zweiten Falle steht der Punkt $\mathfrak{p}_i$ zu dem Systeme $\mathfrak{P}_{n-1}^{(i)}$ in einfacher linealer Dependenz. Die Unveränderlichkeit des Systemcharakters bindet seine Variabilität an eine einzige lineale Strecke.

Im dritten Falle ist der Punkt $\mathfrak{p}_i$ durch das System $\mathfrak{P}_{n-1}^{(i)}$ eindeutig festgelegt. Jede noch so kleine Verrückung des ersteren macht mindestens ein singuläres Punktetripel in ein independentes übergehen.

Es mag allgemein α_i die Anzahl der durch den Punkt $\mathfrak{p}_i$ gehenden singulären Geraden g angeben. Dann wird die lineale Abhängigkeit des Punktes von den $n-1$ anderen als eine des α_i^{ten} Grades bezeichnet.

Indem die lineale Lage dreier Punkte

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

als eine dem allgemeinen Punktetripel auferlegte einfache Bedingung definiert wird, bietet sich naturgemäfs die Frage:

Wie vielen unabhängigen einfachen Bedingungen sind die in einem gegebenen Punktsysteme vorhandenen Singularitäten gleichwertig?

Es kann die gesuchte Anzahl auf doppelte Art abgeleitet werden.

Auf der einen Seite geht nämlich eine h-punktige lineale Gruppe

$$\mathfrak{p}_{i_1}, \quad \mathfrak{p}_{i_2}, \quad \mathfrak{p}_{i_3}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_{i_h}$$

durch das successive Austreten der $h-2$ Punkte

$$\mathfrak{p}_{i_3}, \quad \mathfrak{p}_{i_4}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_{i_h}$$

aus der Verbindungsgeraden des Paares

$$\mathfrak{p}_{i_1}, \quad \mathfrak{p}_{i_2}$$

in eine lineal unabhängige Gruppe über, d. h. die durch sie dargestellte Singularität kommt $h-2$ independenten einfachen Be-

dingungen gleich. Da aber der beschriebene Übergang zur allgemeinen Lage die übrigen Singularitäten des Systemes nicht beeinflufst, so ergiebt sich für die gesuchte Anzahl A der Ausdruck:

$$A = \mu_3 + 2\mu_4 + 3\mu_5 + \cdots + (n-3)\mu_{n-1}.$$

Auf der anderen Seite hebt der Austritt der in dem Punkte $\mathfrak{p}_1$ sich kreuzenden α_1 singulären Geraden aus diesem Strahlenbüschel eine Singularität α_1^{ten} Grades auf, der weitere Austritt der übrigen in $\mathfrak{p}_2$ sich treffenden β_2 singulären Geraden aus diesem Punkte eine β_2^{ten} Grades, der Austritt der noch in $\mathfrak{p}_3$ sich schneidenden γ_3 singulären Geraden aus diesem Punkte eine γ_3^{ten} Grades, u. s. w., u. s. w. Also wird die Summe

$$\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 + \delta_1 + \cdots$$

gleichfalls die gesuchte Anzahl A ergeben.

Um beide Bestimmungsmethoden an einem Beispiel zu erläutern, wähle man als gegebenes Punktsystem die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpunkte

$$(g_i, g_k) = \mathfrak{p}_{i,k}$$

von n in allgemeiner Lage befindlichen Geraden

$$g_1, \quad g_2, \ldots, g_n.$$

Die erste Methode liefert zufolge des Wertes

$$\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \cdots = \mu_{n-2} = 0 \text{ und } \mu_{n-1} = n$$

die gesuchte Anzahl

$$A = n(n-3).$$

Die zweite Methode ergiebt für die Punkte

$$\mathfrak{p}_{1,2}, \quad \mathfrak{p}_{1,3}, \cdots, \quad \mathfrak{p}_{1,n-2}$$

und für

$$\mathfrak{p}_{1,n-1}, \quad \mathfrak{p}_{1,n}$$

successive die Werte:

$$\alpha_1 = \beta_2 = \cdots = \lambda_{n-3} = 2,$$
$$\varrho_{n-2} = \sigma_{n-1} = 1,$$

also für die gesuchte Anzahl $\varphi(n)$ die Rekursionsformel:

$$\varphi(n) = 2(n-3) + 2 + \varphi(n-1).$$

Aus derselben bestimmt sich aber

$$\varphi(n) = n(n-3) = A.$$

Eine dem gegebenen Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

zugehörige Gruppe

$$\mathfrak{p}_1', \quad \mathfrak{p}_2', \ldots, \quad \mathfrak{p}_m'$$

soll eine Fundamentale heifsen, wenn ihre m Elemente notwendig und hinreichend sind, das ganze System zu bestimmen.

So stellen in dem obigen Systeme von $\frac{1}{2}\, n(n-1)$ Punkten

$$\mathfrak{p}_{i,k} = (g_i, g_k)$$

sowohl die n Punkte

$$\mathfrak{p}_{1,2}, \quad \mathfrak{p}_{2,3}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_{n-1,n}, \quad \mathfrak{p}_{n,1}$$

als auch die $2n-4$ anderen

$$\mathfrak{p}_{1,3}, \quad \mathfrak{p}_{1,4}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_{1,n} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{2,3}, \quad \mathfrak{p}_{2,4}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_{2,n}$$

je eine F-Gruppe dar.

Im Allgemeinen wird man eine solche durch folgendes Verfahren finden: Man suche unter den n gegebenen Punkten $\mathfrak{p}_i$ einen, in welchem sich mindestens zwei singuläre Geraden $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$ schneiden. Genügt $\mathfrak{p}_n$ dieser Bedingung, so suche man in dem Systeme $\mathfrak{P}_{n-1}$ der übrigen $n-1$-Punkte wiederum einen, durch welchen gleichfalls mindestens zwei singuläre Geraden $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$ des reduzierten Systemes gehen. Ist $\mathfrak{p}_{n-1}$ ein Punkt der Art, so behandle man das durch sein Ausscheiden entstehende neue System $\mathfrak{P}_{n-2}$ auf ganz analoge Weise und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man zu einem Systeme $\mathfrak{P}_m$ gelangt, dessen m Elemente in höchstens je einer singulären Geraden liegen.

Bestimmt man in einer so erhaltenen F-Gruppe alle etwa noch vorhandenen singulären Geraden und scheidet aus den in diesen liegenden Punktetripeln je einen Punkt aus, so resultiert eine dem ursprünglichen Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ angehörige sogenannte vollständige Gruppe unabhängiger Punkte. Es kann jede derartige Gruppe unabhängig von den sie etwa enthaltenden F-Gruppen auch dadurch gefunden werden, dafs man in dem Systeme $\mathfrak{P}_n$ zuerst irgend zwei Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, dann aufserhalb ihrer Verbindungsgeraden einen dritten Punkt $\mathfrak{p}_3$, darauf aufserhalb der Verbindungsgeraden dieser drei Punkte einen vierten Punkt $\mathfrak{p}_4$, und so successive k Punkte auffafst,

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_k,$$

deren $\frac{1}{2}\, k(k-1)$ Verbindungsgeraden alle noch übrigen Punkte $\mathfrak{p}_{k+h}$ enthalten. Indem man dann unter den $n-k$ Punkten

$$\mathfrak{p}_{k+1}, \quad \mathfrak{p}_{k+2}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_n$$

einen Punkt $\mathfrak{p}_{k+1}$ aufsucht, welcher auf einer einzigen Geraden $g^{(k)}$ des Systemes $\mathfrak{P}_k$ liegt, weiter einen Punkt $\mathfrak{p}_{k+2}$, durch welchen eine

einzige Gerade $g^{(k+1)}$ des Systemes $\mathfrak{P}_{k+1}$ geht, und so fort, wird man wieder zu einem F-Systeme gelangen.

Es mag hier noch eine allgemeine topologische Eigenschaft des endlichen ebenen Punktsystemes hervorgehoben werden. Dieselbe wird ausgesprochen durch den Satz:

Die Elemente irgend eines ebenen Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ können allemal so paarweise durch lineale Strecken verbunden werden, dafs diese die Ebene ihrer ganzen Ausdehnung nach in ein System einander ausschliefsender Dreiseite zerschneiden. Dabei hängt die Anzahl letzterer lediglich von derjenigen der Punkte des Systemes ab, durch welche sie eindeutig bestimmt ist.

Um die erste Behauptung zu verifizieren, nehme man an, ihre Richtigkeit sei für ein System von weniger als n Punkten bereits erkannt. Bei jeder entsprechenden Verbindung der $n-1$ Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$$

liegt dann der Punkt $\mathfrak{p}_n$

a) entweder innerhalb einer betreffenden Dreiecksfläche*)

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l,$$

b) oder auf der gemeinsamen Grenzstrecke

$$\mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_k\,|_e$$

zweier solchen Flächen

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_m.$$

In dem einen wie in dem anderen Falle genügen die passenden linealen Verbindungen des Punktes $\mathfrak{p}_n$

a) mit den drei Ecken

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l,$$

b) mit den zwei Ecken

$$\mathfrak{p}_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_m,$$

um auch für das System $\mathfrak{P}_n$ die verlangte Einteilung der Ebene herbeizuführen.

Weil aber in einem ebenen Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ stets ein allgemeines Punktetripel vorhanden, und weil die Verbindungsgeraden der Elemente desselben die Ebene thatsächlich in vier einander ausschliefsende Dreiseite zerschneiden, so ist hiermit die Wahrheit der ersten Aussage dargethan.

*) Dieselbe kann sowohl durch die endliche Dreiecksfläche $\Delta_{i,k,l}$ als durch eine der drei unendlichen Flächen $|\,\mathfrak{p}_x\,|_1 - \Delta_{i,k,l}$ gegeben sein.

Behufs Beweises der zweiten Behauptung betrachte man irgend ein durch das Punktsystem $\mathfrak{P}_n$ bestimmtes Dreiecksnetz.

Man nehme innerhalb einer Fläche Δ_0 desselben irgend einen Punkt $\mathfrak{p}_0$ und durch diesen eine keinen Punkt $\mathfrak{p}_i$ enthaltende Gerade g an. Beschreibt dann diese in bestimmtem Drehungssinne das einfache Strahlenbüschel $S(\mathfrak{p}_0)$, so wird sie sowohl in jede Ecke $\mathfrak{p}$, als in jede Verbindungsstrecke s, als endlich in jede von Δ_0 verschiedene Dreiecksfläche Δ des Netzes genau einmal und zwar in der Weise eintreten, dafs sie beim Durchgange durch eine Ecke $\mathfrak{p}_i$ und nur bei einem solchen einerseits mit f_i Flächen Δ, andererseits mit $k_i = f_i + 1$ Strecken s zu einem ersten Durchschnitt gelangt. Entsprechend den n Ecken $\mathfrak{p}$ des Netzes erhält man daher die Relation:

$$1) \quad \sum_{i=1}^{n} k_i - \sum_{i=1}^{n} f_i = n,$$

und hieraus unter Einführung der Gesamtanzahlen f und k der Flächen und Kanten die andere:

$$2) \quad f - k + n = 1.$$

Da ferner jede Netzfläche Δ von drei Verbindungsstrecken s begrenzt ist, an jeder Strecke s aber zwei Flächen Δ liegen, so gilt auch:

$$3) \quad 3f = 2k.$$

Aus der Verbindung dieser und der vorhergehenden Gleichung ergeben sich

$$4) \quad f = 2n - 2 \quad \text{und} \quad k = 3n - 3$$

als die gesuchten nur von der Zahl n abhängigen Anzahlen.

§ 3. Das Indexsystem.

Die Charakterisierung eines ebenen Punktsystemes

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_n$$

durch die Charakteristiken seiner $\binom{n}{3}$ Tripel

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

bietet für eine unmittelbar auf sie gegründete Entwicklung einer allgemeinen Theorie dieser Gebilde den Nachteil, dafs mit wachsender Anzahl n der Elemente des Systemes

$$(n = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots)$$

die zugehörigen $\binom{n}{3}$ Einzelbedingungen

$$\left(\binom{n}{3} = 1, 4, 10, 20, 35, \ldots\right)$$

infolge ihrer Vielheit wie ihrer Zusammenhangslosigkeit sowohl dem Studium eines bestimmt vorliegenden Systemes als der vergleichenden Betrachtung mehrerer Systeme grofse Schwierigkeit in den Weg legen. Der hierdurch gestellten Aufgabe, das System der isolierten Tripelcharakteristiken unter eine Definition zusammenzufassen, welche auf der Vorstellung des Punktsystemes als eines einheitlichen Ganzen basiert, wird das Indexsystem gerecht.

In jedem beliebigen Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

erscheinen je $n - 1$ Elemente aus dem n^{ten} als dem Centrum eines die Ebene überdeckenden Strahlenbüschels auf ein- oder mehrdeutige Weise cyklisch um dieses geordnet, nämlich nach derjenigen zeitlichen Reihenfolge, in welcher ein das Strahlenbüschel in bestimmtem Sinne beschreibender Strahl sie passiert.

Ich nenne die einem Punkte $\mathfrak{p}_i$ des Systemes so zugeordnete Folge der übrigen Punkte das Ortszeichen oder den Index des Punktes $\mathfrak{p}_i$ in dem Systeme

$$\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_n \equiv \mathfrak{P}^{(i)}_{n-1},$$

und setze bezeichnend

a) bei linksseitigem oder positivem Drehungssinn:

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}^{(i)}_1, \ \mathfrak{p}^{(i)}_2, \ldots, (\mathfrak{p}^{(i)}_a, \ldots, \mathfrak{p}^{(i)}_b), \ldots, \mathfrak{p}^{(i)}_{n-1},$$

b) bei rechtsseitigem oder negativem Drehungssinn:

$$J'(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}^{(i)}_1, \ \mathfrak{p}^{(i)}_{n-1}, \ldots, (\mathfrak{p}^{(i)}_b, \ldots, \mathfrak{p}^{(i)}_a), \ldots, \mathfrak{p}^{(i)}_2,$$

wo jede eingeklammerte Reihe eine Punktgruppe indifferenter Folge, d. h. die Punkte einer durch $\mathfrak{p}_i$ laufenden Geraden einschliefst.

Ein Index mit r Klammerreihen von resp.

$$m_1, \ m_2, \ \ldots, \ m_r$$

Elementen wird mithin

$$(n + r - \sum_{i=1}^{r} m_i) \, . \, m_1 ! \, . \, m_2 ! \ldots m_r !$$

gleichwertige Folgen veranschaulichen.

Um den Index des Punktes $\mathfrak{p}_i$ von der durch die cyklische Vertauschbarkeit seiner Elemente involvierten Mehrdeutigkeit zu befreien, kann für die Fälle

$$i = 1, 2, \ldots, n-1$$

der Punkt

$$\mathfrak{p}_{i+1},$$

für den Fall

$$i = n$$

der Punkt

$$\mathfrak{p}_1$$

als Anfangspunkt des Index angenommen werden.

Gemäfs dieser Festsetzung entspricht einem gegebenen Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

ein unzweideutig bestimmtes Indexsystem

$$\begin{aligned}
&'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \ldots, (\ldots), \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}',\\
&'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'', \ldots, (\ldots), \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}'',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2^{(n)}, \mathfrak{p}_3^{(n)}, \ldots, (\ldots), \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Ich definiere dasselbe als die erste Charakteristik des gegebenen Punktsystemes.

Um die vollkommene Äquivalenz dieser mit der früheren Definition zu erkennen, bedarf es des doppelten Nachweises:

1) dafs durch das Charakteristikensystem der $\binom{n}{3}$ Punktetripel

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

der Index eines jeden Grundpunktes —

2) dafs durch das System der n Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1), \ 'J(\mathfrak{p}_2), \ \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_n)$$

die Charakteristik eines beliebigen Punktetripels — unzweideutig bestimmt ist.

Was zunächst die Ableitung des Index

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}'$$

aus den $\binom{n-1}{2}$ den Punkt $\mathfrak{p}_1$ enthaltenden Tripeln anlangt, so ist dieselbe mit Hilfe der Schlufsweise von m auf $m+1$ leicht auszuführen.

Angenommen, es sei aus den Charakteristiken der $\binom{n-2}{2}$ Tripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4;\ \cdots;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_{n-1};\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;\ \cdots;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}$$

der Index des Punktes $\mathfrak{p}_1$ rücksichtlich der $n-2$ Punkte

$$\mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-1}$$

in der Form bestimmt:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-2}'.$$

Wenn dann diejenigen zwei Nachbarelemente dieses Index, welche durch den Punkt $\mathfrak{p}_n$ getrennt werden, gegeben sind durch

$$\mathfrak{p}_i' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{i+1}',$$

so ergiebt die Anschauung:

a) bei positiver Folge

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i',\ \mathfrak{p}_{i+1}'$$

die Charakteristiken

$$\alpha)\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_n) = +1 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}', \mathfrak{p}_n) = -1,$$
$$\beta)\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_n) = -1 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}', \mathfrak{p}_n) = +1,$$

b) bei negativer Folge

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i',\ \mathfrak{p}_{i+1}'$$

die anderen

$$\alpha)\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_n) = +1 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}', \mathfrak{p}_n) = +1,$$
$$\beta)\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_n) = -1 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}', \mathfrak{p}_n) = -1.$$

Für jedes andere Tripel

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_k',\ \mathfrak{p}_{k+1}'$$

gilt dagegen:

a) bei positiver Folge

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_k',\ \mathfrak{p}_{k+1}'$$

$$\alpha)\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_n) = -1 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{k+1}', \mathfrak{p}_n) = -1,$$
$$\beta)\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_n) = +1 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{k+1}', \mathfrak{p}_n) = +1,$$

b) bei negativer Folge

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_k',\ \mathfrak{p}_{k+1}'$$

$$\alpha)\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_n) = -1 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{k+1}', \mathfrak{p}_n) = +1,$$
$$\beta)\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_n) = +1 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{k+1}', \mathfrak{p}_n) = -1.$$

Vergleicht man daher successive die Vorzeichen der $n-3$ Punktefolgen

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_x',\ \mathfrak{p}_{x+1}'$$
$$(x = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-2)$$

mit den zugehörigen Charakteristikenpaaren

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{x+1}', \mathfrak{p}_n),$$

so mufs man unmittelbar zu einem einzigen Tripel gelangen, für welches die zuerst angegebenen Vorzeichenverhältnisse statthaben, und durch welches somit die Lage des Punktes $\mathfrak{p}_n$ im Index

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{i+1}', \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}'$$

unzweideutig bestimmt wird.

Es ist aber in einem allgemeinen Punktetripel

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3$$

der Index des Punktes $\mathfrak{p}_1$ allemal gegeben durch:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3,$$

daher wird die $n-2$ malige Anwendung der vorgeschriebenen Schlufsweise den Index $'J(\mathfrak{p}_1)$ auch im Systeme $\mathfrak{P}_n$ in einer und nur einer Form ergeben.

Man erkennt leicht, dafs die Annahme von singulären Punktetripeln

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k$$

die Bestimmung des Index $'J(\mathfrak{p}_1)$ nur vereinfacht, indem alle mit $\mathfrak{p}_1$ in einer Geraden liegenden Punkte

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \ldots$$

durch einen einzigen von ihnen ersetzt werden können.

Die Lösung der zweiten Aufgabe, aus einem als bekannt vorausgesetzten Indexsysteme

$$'J(\mathfrak{p}_1), \quad 'J(\mathfrak{p}_2), \quad \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_n)$$

die Charakteristik eines beliebigen Tripels zu bestimmen, beruht auf dem Umstande, dafs aus dem Indexsysteme des Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ durch die Ausscheidung von irgend m Elementen $\mathfrak{p}_i$ dasjenige eines Systemes $\mathfrak{P}_{n-m}$ hervorgeht.

Zunächst wird aus den Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i), \quad 'J(\mathfrak{p}_k), \quad 'J(\mathfrak{p}_l)$$

der Elemente des betrachteten Tripels

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

dieses entweder als ein singuläres oder als ein allgemeines konstatiert, je nachdem irgend zwei der drei Punkte in dem Index des dritten der nämlichen oder verschiedenen Klammerreihen angehören.

Stellt sich das Tripel als lineal unabhängig heraus, so wird man naturgemäfs untersuchen, ob nach Adjunktion eines vierten Elementes $\mathfrak{p}_m$ durch die vier Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i),\ 'J(\mathfrak{p}_k),\ 'J(\mathfrak{p}_l),\ 'J(\mathfrak{p}_m)$$

das Tripel vollständig charakterisiert ist.

Das Problem kann in allgemeinster Fassung so formuliert werden: Man bilde aus den 24 Anordnungen von vier verschiedenen Elementen

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_m$$

alle möglichen Systeme von je vier Komplexionen der Form:

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{i_3}, \mathfrak{p}_{i_4};\quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k_2}, \mathfrak{p}_{k_3}, \mathfrak{p}_{k_4};\quad \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_{l_2}, \mathfrak{p}_{l_3}, \mathfrak{p}_{l_4};\quad \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m_2}, \mathfrak{p}_{m_3}, \mathfrak{p}_{m_4}.$$

Dann sind diejenigen Systeme aufzusuchen, welche die Indexsysteme

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{i_3}, \mathfrak{p}_{i_4};\quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_{k_2}, \mathfrak{p}_{k_3}, \mathfrak{p}_{k_4};$$
$$'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_{l_2}, \mathfrak{p}_{l_3}, \mathfrak{p}_{l_4};\quad 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_{m_2}, \mathfrak{p}_{m_3}, \mathfrak{p}_{m_4}$$

allgemeiner Punktequadrupel involvieren.

Da das Indexsystem einer Punktgruppe $\mathfrak{P}_4$ zufolge der cyklischen Vertauschbarkeit der Elemente eines jeden Index 3^4 verschiedene Schreibweisen zuläfst, so reduzieren sich die überhaupt aufstellbaren 6^4 Systeme auf folgende 2^4 charakteristische Formen:

I a. $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,\quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,$
$'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k,\quad 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k;$

b. $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,\quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,$
$'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i,\quad 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i;$

c. $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,\quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,$
$'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k,\quad 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k;$

d. $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,\quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,$
$'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i,\quad 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i;$

II a. $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m;\quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,$
$'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k,\quad 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i;$

b. $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,\quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,$
$'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i,\quad 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k;$

c. $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,\quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,$
$'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m', \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i,\quad 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k;$

d. $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,\quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,$
$'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k,\quad 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i;$

$$\begin{aligned}
\text{III a.}\quad & {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \quad {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,\\
& {}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \quad {}'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k;\\
\text{b.}\quad & {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l, \quad {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,\\
& {}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \quad {}'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i;\\
\text{c.}\quad & {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l, \quad {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,\\
& {}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \quad {}'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k;\\
\text{d.}\quad & {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \quad {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,\\
& {}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \quad {}'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV a.}\quad & {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \quad {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,\\
& {}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \quad {}'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i;\\
\text{b.}\quad & {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l, \quad {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,\\
& {}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \quad {}'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{V a.}\quad & {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l, \quad {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,\\
& {}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \quad {}'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i;\\
\text{b.}\quad & {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \quad {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,\\
& {}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \quad {}'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k.
\end{aligned}$$

Das Schema umfafst fünf durch die Ziffern I, II, III, IV, V markierte Gruppen, von denen die drei ersten je vier, die beiden letzten je zwei Systeme enthalten. Die Systeme einer Gruppe stehen in der einfachen Beziehung, dafs aus einem von ihnen die anderen durch passende Vertauschungen der Elemente $\mathfrak{p}$ abgeleitet werden können. Denn indem man innerhalb einer der drei Gruppen I, II, III auf deren erstes System successive die Vertauschungen anwendet

$$\frac{i}{k}, \quad \frac{l}{m}, \quad \frac{i}{k}\cdot\frac{l}{m},$$

erhält man resp. das zweite, dritte und vierte System, dagegen gehen die ersten Systeme der Gruppen IV und V

a) zufolge der Substitution

$$\frac{i}{k}\,\frac{l}{m}$$

wieder in sich selbst,

b) zufolge einer der beiden anderen

$$\frac{i}{k} \quad \text{und} \quad \frac{l}{m}$$

in die zweiten Systeme über.

Weil aber die Vertauschung zweier Elemente

$$\mathfrak{p}_x, \quad \mathfrak{p}_y$$

in einem Systeme

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \ \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \ \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \ \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \ \ldots$$

in bezug auf eine dasselbe etwa veranschaulichende Punktgruppe

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m$$

nur dem Wechsel der Benennungen zweier an und für sich festbleibender Punkte gleichkommt, so bleiben gemäfs der angegebenen permutativen Zurückführung der obigen 16 Systeme auf fünf auch für die Indexsysteme des allgemeinen ebenen Punktquadrupels als möglicherweise wesentlich verschieden höchstens noch die fünf Formen:

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} 'J(\mathfrak{p}_i) &= \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, & 'J(\mathfrak{p}_k) &= \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \\ 'J(\mathfrak{p}_l) &= \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, & 'J(\mathfrak{p}_m) &= \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k; \end{aligned}$$

$$\text{II.} \quad \begin{aligned} 'J(\mathfrak{p}_i) &= \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, & 'J(\mathfrak{p}_k) &= \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \\ 'J(\mathfrak{p}_l) &= \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, & 'J(\mathfrak{p}_m) &= \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i; \end{aligned}$$

$$\text{III.} \quad \begin{aligned} 'J(\mathfrak{p}_i) &= \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, & 'J(\mathfrak{p}_k) &= \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l, \\ 'J(\mathfrak{p}_l) &= \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, & 'J(\mathfrak{p}_m) &= \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k; \end{aligned}$$

$$\text{IV.} \quad \begin{aligned} 'J(\mathfrak{p}_i) &= \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, & 'J(\mathfrak{p}_k) &= \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l, \\ 'J(\mathfrak{p}_l) &= \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, & 'J(\mathfrak{p}_m) &= \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i; \end{aligned}$$

$$\text{V.} \quad \begin{aligned} 'J(\mathfrak{p}_i) &= \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l, & 'J(\mathfrak{p}_k) &= \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \\ 'J(\mathfrak{p}_l) &= \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, & 'J(\mathfrak{p}_m) &= \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i. \end{aligned}$$

Nun verwandelt sich das System I zufolge der Ersetzung der Elemente

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_m, \quad \mathfrak{p}_k$$

durch resp.

$$\mathfrak{p}_m, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_i$$

in das andere

$$\text{I}'. \quad \begin{aligned} 'J(\mathfrak{p}_m) &= \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, & 'J(\mathfrak{p}_i) &= \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \\ 'J(\mathfrak{p}_l) &= \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, & 'J(\mathfrak{p}_k) &= \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \end{aligned}$$

oder in das identische

$$\text{V a.} \quad \begin{aligned} 'J(\mathfrak{p}_i) &= \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l, & 'J(\mathfrak{p}_k) &= \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \\ 'J(\mathfrak{p}_l) &= \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, & 'J(\mathfrak{p}_m) &= \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \end{aligned}$$

und das System II gemäfs der Ersetzung der Elemente

$$\mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m$$

durch resp.

$$\mathfrak{p}_m, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

in das andere

$$\text{II}'. \quad {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \quad {}'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l,$$
$${}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \quad {}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i$$

oder in das identische

$$\text{III}. \quad {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \quad {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,$$
$${}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \quad {}'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k.$$

Es bleiben somit die Systeme I, II, IV als die einzigen übrig, bei welchen es noch zweifelhaft, ob zwischen ihnen eine weitere permutative Transformation möglich ist.

Dies zu entscheiden, ersetze man zunächst in I die Folge

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m$$

durch irgend eine andere

$$\mathfrak{p}_t, \quad \mathfrak{p}_x, \quad \mathfrak{p}_y, \quad \mathfrak{p}_z$$

und schreibe entsprechend den drei möglichen Zerlegungen von vier Elementen in je zwei Paare das resultierende System in den drei Anordnungen:

$$\text{Ia}. \quad {}'J(\mathfrak{p}_t) = \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z, \quad {}'J(\mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z,$$
$${}'J(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_x, \quad {}'J(\mathfrak{p}_z) = \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_x;$$
$$\text{Ib}. \quad {}'J(\mathfrak{p}_t) = \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_x, \quad {}'J(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_z,$$
$${}'J(\mathfrak{p}_z) = \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_t, \quad {}'J(\mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_y;$$
$$\text{Ic}. \quad {}'J(\mathfrak{p}_t) = \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \quad {}'J(\mathfrak{p}_z) = \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y,$$
$${}'J(\mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_t, \quad {}'J(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_t.$$

Aus diesen drei Systemen denke man sich 21 weitere dadurch abgeleitet, dafs man in einem jeden die Reihenfolge der vier Indices

$${}'J_1, \quad {}'J_2, \quad {}'J_3, \quad {}'J_4$$

nach folgendem Schema permutiert:

$$1.\ {}'J_1, {}'J_2, {}'J_3, {}'J_4, \quad 2.\ {}'J_2, {}'J_1, {}'J_3, {}'J_4,$$
$$3.\ {}'J_1, {}'J_2, {}'J_4, {}'J_3, \quad 4.\ {}'J_2, {}'J_1, {}'J_4, {}'J_3,$$
$$5.\ {}'J_3, {}'J_4, {}'J_1, {}'J_2, \quad 6.\ {}'J_3, {}'J_4, {}'J_2, {}'J_1,$$
$$7.\ {}'J_4, {}'J_3, {}'J_1, {}'J_2, \quad 8.\ {}'J_4, {}'J_3, {}'J_2, {}'J_1.$$

Von den so aus I entstehenden 24 Reihen hat eine notwendig die Form:

$${}'J(\mathfrak{p}_i), \quad {}'J(\mathfrak{p}_k), \quad {}'J(\mathfrak{p}_l), \quad {}'J(\mathfrak{p}_m).$$

Je nachdem daher dieselbe mit einem der beiden Systeme II und IV identisch ist oder nicht, besteht auch für I die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der gesuchten Transformation.

Es liefert aber der Vergleich der vier Indices

$$'J(\mathfrak{p}_t),\quad 'J(\mathfrak{p}_x),\quad 'J(\mathfrak{p}_y),\quad 'J(\mathfrak{p}_z)$$

in den drei Systemen

Ia, Ib, Ic

als Reihen ihrer zweiten Elemente:

$$\text{Ia.}\quad \mathfrak{p}_y,\quad \mathfrak{p}_y,\quad \mathfrak{p}_t,\quad \mathfrak{p}_t,$$
$$\text{Ib.}\quad \mathfrak{p}_z,\quad \mathfrak{p}_x,\quad \mathfrak{p}_y,\quad \mathfrak{p}_t,$$
$$\text{Ic.}\quad \mathfrak{p}_x,\quad \mathfrak{p}_x,\quad \mathfrak{p}_z,\quad \mathfrak{p}_z,$$

und für die vier Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i),\quad 'J(\mathfrak{p}_k),\quad 'J(\mathfrak{p}_l),\quad 'J(\mathfrak{p}_m)$$

in den Systemen II und IV als die entsprechenden Reihen:

$$\text{II.}\quad \mathfrak{p}_l,\quad \mathfrak{p}_l,\quad \mathfrak{p}_i,\quad \mathfrak{p}_k$$
$$\text{IV.}\quad \mathfrak{p}_l,\quad \mathfrak{p}_m,\quad \mathfrak{p}_i,\quad \mathfrak{p}_k.$$

Hiernach weisen die beiden Reihen Ia und Ic nur je zwei, die Reihe Ib vier verschiedene Elemente auf, während die Reihen II und IV resp. drei und vier solche enthalten. Diese Anzahlen werden durch irgend welche Vertauschungen der vier Indices $'J$ in den zugehörigen Systemen nicht geändert. Es kann daher weder unter den $3 \cdot 8$ Systemen Ia, Ib, Ic das System II, noch unter den $2 \cdot 8$ Systemen Ia, Ic das System IV auftreten.

Vergleicht man nun in dem Systeme Ib die Folge der vier Indices

$$'J(\mathfrak{p}_t),\quad 'J(\mathfrak{p}_x),\quad 'J(\mathfrak{p}_y),\quad 'J(\mathfrak{p}_z)$$

mit derjenigen ihrer zweiten Elemente

$$\mathfrak{p}_z,\quad \mathfrak{p}_x,\quad \mathfrak{p}_y,\quad \mathfrak{p}_t,$$

ebenso in IV die Folge der vier Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i),\quad 'J(\mathfrak{p}_k),\quad 'J(\mathfrak{p}_l),\quad 'J(\mathfrak{p}_m)$$

mit der zugehörigen Reihe

$$\mathfrak{p}_l,\quad \mathfrak{p}_m,\quad \mathfrak{p}_i,\quad \mathfrak{p}_k,$$

so erkennt man, dafs die Anordnung

$$\mathfrak{p}_z,\quad \mathfrak{p}_x,\quad \mathfrak{p}_y,\quad \mathfrak{p}_t$$

aus der anderen

$$\mathfrak{p}_t,\quad \mathfrak{p}_x,\quad \mathfrak{p}_y,\quad \mathfrak{p}_z$$

durch eine ungerade, die Anordnung

$$\mathfrak{p}_t, \quad \mathfrak{p}_m, \quad \mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k$$

aus der anderen

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_t, \quad \mathfrak{p}_m$$

durch eine gerade Anzahl von Transpositionen je zweier benachbarter Elemente hervorgeht. Es erfolgt aber zugleich mit dem Stellenwechsel zweier Glieder der Reihe

$$'J(\mathfrak{p}_t), \quad 'J(\mathfrak{p}_x), \quad 'J(\mathfrak{p}_y), \quad 'J(\mathfrak{p}_z)$$

auch die Umsetzung der ihnen zugehörigen Elemente der Reihe

$$\mathfrak{p}_z, \quad \mathfrak{p}_x, \quad \mathfrak{p}_y, \quad \mathfrak{p}_t.$$

Daher wird wie in dem ursprünglichen Systeme I so auch in einem der sieben abgeleiteten

$$'J(\mathfrak{p}_{t'}), \quad 'J(\mathfrak{p}_{x'}), \quad 'J(\mathfrak{p}_{y'}), \quad 'J(\mathfrak{p}_{z'})$$

die Reihe

$$\mathfrak{p}_{t'}, \quad \mathfrak{p}_{x'}, \quad \mathfrak{p}_{y'}, \quad \mathfrak{p}_{z'}$$

in die der zugehörigen zweiten Elemente

$$\mathfrak{p}_{t_1}, \quad \mathfrak{p}_{x_1}, \quad \mathfrak{p}_{y_1}, \quad \mathfrak{p}_{z_1}$$

durch eine ungerade Zahl von Permutationen je zweier Elemente überführbar sein.

Im Besonderen kann also ein unter den acht Systemen Ib etwa vorhandenes System

$$'J(\mathfrak{p}_i), \quad 'J(\mathfrak{p}_k), \quad 'J(\mathfrak{p}_t), \quad 'J(\mathfrak{p}_m)$$

nicht mit dem Systeme IV identisch sein.

Um schliefslich noch festzustellen, ob die Systeme II und IV auseinander permutativ ableitbar sind, bilde man aus II die 3 . 8 Systeme:

$$\begin{aligned}
\text{IIa) 1.}\quad & 'J(\mathfrak{p}_t) = \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z, \quad 'J(\mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z, \\
& 'J(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_x, \quad 'J(\mathfrak{p}_z) = \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_t; \\
\text{2.}\quad & 'J(\mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z, \quad 'J(\mathfrak{p}_t) = \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z, \\
& 'J(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_x, \quad 'J(\mathfrak{p}_z) = \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_t; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{IIb) 1.}\quad & 'J(\mathfrak{p}_t) = \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_x, \quad 'J(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_z, \\
& 'J(\mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_y, \quad 'J(\mathfrak{p}_z) = \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_y; \\
\text{2.}\quad & 'J(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_z, \quad 'J(\mathfrak{p}_t) = \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_x, \\
& 'J(\mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_y, \quad 'J(\mathfrak{p}_z) = \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_y, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

$$\text{IIc) 1.}\quad {}'J(\mathfrak{p}_t) = \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \quad {}'J(\mathfrak{p}_z) = \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_x,$$
$$ {}'J(\mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_t, \quad {}'J(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_t;$$
$$\text{2.}\quad {}'J(\mathfrak{p}_z) = \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_x, \quad {}'J(\mathfrak{p}_t) = \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y,$$
$$ {}'J(\mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_t, \quad {}'J(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_t;$$

. . . . . .

Hierin sind die Reihen der zweiten Elemente

$$\text{IIa)}_2 \quad \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_x;$$
$$\text{IIb)}_2 \quad \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_t;$$
$$\text{IIc)}_2 \quad \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_z,$$

und es ergiebt sich als Anzahl der verschiedenen Elemente einer jeden Reihe die Zahl drei, während die entsprechende Anzahl für das System IV vier beträgt. Also folgt auch für II und IV die Unmöglichkeit der gesuchten Überführung.

Zur nunmehrigen Bestimmung der den drei Systemen

$$\text{I.}\ {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \quad \text{II.}\ {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \quad \text{IV.}\ {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,$$
$$ {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \quad {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \quad {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l,$$
$$ {}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \quad {}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \quad {}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k,$$
$$ {}'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \quad {}'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \quad {}'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i$$

etwa entsprechenden allgemeinen Punktequadrupel dient der unmittelbar durch die Anschauung gegebene Hilfssatz:

Je nachdem in einem lineal unabhängigen Punktequadrupel

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m$$

zwei Punkte $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$ in bezug auf die Verbindungsgerade der beiden anderen $\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$ auf der nämlichen oder auf verschiedenen Seiten liegen, enthalten ihre Indices:

$${}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \ldots \quad \text{und} \quad {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \ldots$$

bei resp. den ersten Elementen

$$\mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i$$

die beiden anderen

$$\mathfrak{p}_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_m$$

in entsprechender oder in entgegengesetzter Folge.

In der That wird ein die Gerade $|\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m|$ in bestimmter Richtung durchlaufender Punkt aus den festen Centren $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_k$ durch zwei veränderliche Strahlen projeziert, welchen entsprechend den Lagen des Schnittpunktes

$$(|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|, \quad |\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m|)$$

a) auf der unendlichen Strecke $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k{}_2$, b) auf der endlichen $_1|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|_1$ übereinstimmender resp. entgegengesetzter Drehungssinn zukommt.

Zufolge dieses Satzes ergiebt der paarweise Vergleich der Indices des Systemes I für dessen gesuchtes geometrisches Äquivalent die Beziehungen:

Es begegnen sich die Geraden

a) $|\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m|$ und $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$, b) $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m|$ und $|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|$

auf den unendlichen Strecken

a) $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|_2$ und $|\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m|_2$, b) $|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|_2$ und $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m|_2$,

dagegen die Geraden

$$|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m| \text{ und } |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l|$$

auf den endlichen Strecken

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l|_1 \text{ und } |\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m|_1.$$

Hiernach bestimmen die vier Punkte

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m$$

notwendig die Ecken eines konvexen Vierecks mit den beiden Diagonalen

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l|_1 \text{ und } |\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m|_1.$$

Die Anschauung lehrt, dafs eine solche Figur zweideutig definirt ist, nämlich:

1. als Quadrupel mit positiver Folge

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m,$$

wenn die Gerade $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l|$ die Punkte $\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m$ resp. zur Rechten und zur Linken —

2. als Quadrupel mit negativer Folge

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m,$$

wenn die Gerade $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l|$ die Punkte $\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m$ resp. zur Linken und zur Rechten liegen hat.

Das Quadrupel der ersten Art entspricht dem Systeme I und besitzt die vier positiven Tripel:

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l; \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m; \quad \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i; \quad \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k,$$

während das Quadrupel zweiter Art dasjenige Indexsystem I′ darstellt, welches aus I durch die Vertauschung der Elemente $\mathfrak{p}_k$ und $\mathfrak{p}_m$ entsteht.

Analog ergiebt die Anwendung des obigen Satzes auf das Indexsystem II für ein zugehöriges Punktsystem die Bedingungen:

Es liegen

a) der Schnittpunkt $(|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|, |\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m|)$ aufserhalb der Strecke $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|_1$ und innerhalb der anderen $|\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m|_1$,

b) der Schnittpunkt $(|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|, |\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i|)$ aufserhalb der Strecke $|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|_1$ und innerhalb der anderen $|\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i|_1$,

c) der Schnittpunkt $(|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m|, |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l|)$ aufserhalb der Strecke $|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m|_1$ und innerhalb der anderen $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l|_1$.

Hiernach fällt der Punkt $\mathfrak{p}_k$ in das Innere der durch die drei anderen $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$ bestimmten endlichen Dreiecksfläche, und es kommt gemäfs seines Index

$$'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$$

der Punktefolge

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m$$

die Charakteristik zu

$$c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m) = -1.$$

Hiermit ist das Quadrupel eindeutig charakterisiert, indem die drei übrigen Tripel

$$\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l; \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m; \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i$$

ein bestimmtes, nämlich das negative Vorzeichen erhalten; sein Indexsystem aber ist thatsächlich mit II identisch.

In dem Falle des Indexsystemes IV endlich liefert der Vergleich

a) von $'J(\mathfrak{p}_i)$ mit $'J(\mathfrak{p}_k)$ und von $'J(\mathfrak{p}_l)$ mit $'J(\mathfrak{p}_m)$,

b) von $'J(\mathfrak{p}_i)$ mit $'J(\mathfrak{p}_l)$ und von $'J(\mathfrak{p}_i)$ mit $'J(\mathfrak{p}_m)$

für ein etwaiges äquivalentes Punktequadrupel die Bestimmungen:

a) der Schnittpunkt $(|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|, |\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m|)$ fällt in die Strecken

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|_1 \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m|_1,$$

b) die Schnittpunkte

$$(|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l|, |\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m|) \quad \text{und} \quad (|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m|, |\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|)$$

liegen in resp. den Strecken

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l|_1 \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m|_1.$$

Nach der ersten Bedingung müfste der Punkt $\mathfrak{p}_k$ aufserhalb, nach der zweiten innerhalb der endlichen Dreiecksfläche liegen

$$\Delta(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m).$$

Also gestattet das Indexsystem IV keine Darstellung durch ein allgemeines Punktequadrupel.

Benutzt man die in der projektiven Geometrie gebräuchlichen Unterscheidungen elliptischer und hyperbolischer Punktequadrupel, so kann man, alles zusammenfassend, den Satz formulieren:

Theorem 1: Damit ein Schema der Form

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{l_1}, \mathfrak{p}_{m_1}, \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{l_2}, \mathfrak{p}_{m_2},$$
$$'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{k_1}, \quad 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{k_2},$$

worin die 2.2 Paare

$$\mathfrak{p}_{l_h}, \mathfrak{p}_{m_h} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{i_h}, \mathfrak{p}_{k_h}$$

abgesehen von der Reihenfolge ihrer Elemente identisch sind mit resp. den beiden anderen

$$\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k,$$

übereinstimme mit dem Indexsysteme eines lineal unabhängigen Punktequadrupels

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m,$$

ist es notwendig und hinreichend,

a) dafs entweder die Folge

$$\mathfrak{p}_{l_1}, \quad \mathfrak{p}_{l_2}, \quad \mathfrak{p}_{i_1}, \quad \mathfrak{p}_{i_2}$$

nur zwei verschiedene Elemente aufweist,

b) oder dafs sie drei solche zählt,

c) oder dafs, falls vier vorhanden, die Folge

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m$$

zu einer anderen Permutationsklasse gehört.

Der erste Fall liefert entsprechend den vier möglichen Annahmen

a) $l_1 = l_2 = l, \quad i_1 = i_2 = i;$ b) $l_1 = l_2 = l, \quad i_1 = i_2 = k;$
c) $l_1 = l_2 = m, \quad i_1 = i_2 = i;$ d) $l_1 = l_2 = m, \quad i_1 = i_2 = k$

die vier positiv elliptischen Folgen:

a) $\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m;$ b) $\mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m;$
c) $\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_m, \quad \mathfrak{p}_l;$ d) $\mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_m, \quad \mathfrak{p}_l.$

Analog findet man im dritten Falle gemäfs den beiden allein möglichen Vorkommnissen

a) $l_1 = l, \quad l_2 = m, \quad i_1 = k, \quad i_2 = i,$ b) $l_1 = m, \quad l_2 = l, \quad i_1 = i, \quad i_2 = k$

als geometrische Äquivalente die positiv elliptischen Folgen:

a) $\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_m, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l;$ b) $\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_m.$

Der zweite Fall endlich ergiebt für die Annahmen

a) $l_1 = l_2 = l, \quad i_1 = i, k, \quad i_2 = k, i,$
b) $l_1 = l_2 = m, \quad i_1 = i, k, \quad i_2 = k, i,$
c) $l_1 = l, m, \quad l_2 = m, l, \quad i_1 = i_2 = i,$
d) $l_1 = l, m, \quad l_2 = m, l, \quad i_1 = i_2 = k$

als geometrische Abbilder:

a) die positiv hyperbolischen Folgen:

$\alpha)\ \mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_m, \ \mathfrak{p}_l, \ (\mathfrak{p}_k); \quad \beta)\ \mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{p}_m, \ \mathfrak{p}_l, \ (\mathfrak{p}_i),$

b) die negativ hyperbolischen Folgen:

$\alpha)\ \mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{p}_m, \ \mathfrak{p}_l, \ (\mathfrak{p}_i); \quad \beta)\ \mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_m, \ \mathfrak{p}_l, \ (\mathfrak{p}_k),$

c) die positiv hyperbolischen Folgen:

$\alpha)\ \mathfrak{p}_l, \ \mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{p}_i, \ (\mathfrak{p}_m); \quad \beta)\ \mathfrak{p}_l, \ \mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_k, \ (\mathfrak{p}_m),$

d) die negativ hyperbolischen Folgen:

$\alpha)\ \mathfrak{p}_m, \ \mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{p}_i, \ (\mathfrak{p}_l), \quad \beta)\ \mathfrak{p}_l, \ \mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_k, \ (\mathfrak{p}_m).$

Dieses Theorem bietet für die ursprüngliche Aufgabe, aus den Indices der n Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \ \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

die Charakteristik des allgemeinen Punktetripels

$$\mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{p}_l$$

zu bestimmen, unmittelbar folgende Lösung:

Man schreibe in dem Indexsysteme

$$'J(\mathfrak{p}_1), \ 'J(\mathfrak{p}_2), \ldots, 'J(\mathfrak{p}_n)$$

die Indices der vier lineal unabhängigen Punkte

$$\mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{p}_l, \ \mathfrak{p}_m$$

mit resp. den Anfangselementen

$$\mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_m, \ \mathfrak{p}_l$$

und lese aus den Anordnungen dieser vier Elemente in den ersteren mit Hülfe des aufgestellten Satzes direkt die gesuchte Charakteristik ab.

Vorstehendes Verfahren wird illusorisch, wenn im Besonderen aufserhalb der drei Geraden

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|, \quad |\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|, \quad |\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i|$$

kein Punkt $\mathfrak{p}_m$ vorhanden ist. — Man hat dann drei Möglichkeiten zu unterscheiden:

a) entweder enthält jede der drei Geraden noch mindestens einen dritten Punkt $\mathfrak{p}$,

b) oder es gilt dies für nur zwei Geraden,

c) oder es findet nur für eine einzige statt.

Nun lehrt die Anschauung, falls der Index eines Punktes $\mathfrak{p}_t$ in bezug auf ein lineales System $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$, ... gegeben ist durch

$$'J(\mathfrak{p}_t) = \mathfrak{p}_x, \ldots, \quad \mathfrak{p}_y, \ldots, \quad \mathfrak{p}_z, \ldots,$$

dafs ein die Gerade $|\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y|$ in der Richtung $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$ verfolgender Beobachter den Punkt $\mathfrak{p}_t$ zur Linken liegen hat.

Hiernach kann in dem ersten Falle aus den Formen der drei Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i), \quad 'J(\mathfrak{p}_k), \quad 'J(\mathfrak{p}_l)$$

unmittelbar auf die Lage der drei Punkte

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

zu resp. den drei Geraden

$$|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|, \quad |\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i|, \quad |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|,$$

d. h. auf die Charakteristik des Tripels

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

geschlossen werden.

In dem zweiten Falle, wo eine Gerade, etwa $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$, keinen dritten Punkt $\mathfrak{p}$ enthält, suche man in den Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \cdots, \mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k_2}, \ldots \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \cdots, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i_2}, \cdots$$

zu resp. den Punkten

$$\mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i$$

deren $2 \cdot 2$ Nachbarelemente

$$\mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{k_2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}.$$

Aus den vier Indices des Punktsystemes

$$\mathfrak{p}_{i_1}, \quad \mathfrak{p}_{i_2}, \quad \mathfrak{p}_{k_1}, \quad \mathfrak{p}_{k_2}$$

bestimmt sich dasselbe

a) entweder als ein elliptisches mit den Diagonalen

$$|\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{k_2}|,$$

b) oder als ein hyperbolisches

$\alpha)$ $\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{k_\mu}, (\mathfrak{p}_{k_\nu})$; $\beta)$ $\mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{k_2}, \mathfrak{p}_{i_\mu}, (\mathfrak{p}_{i_\nu})$,

c) oder als ein elliptisches mit den Diagonalen

$\alpha)$ $|\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{k_1}|$ und $|\mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{k_2}|$; $\beta)$ $|\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{k_2}|$ und $|\mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{k_1}|$.

Eine einfache Überlegung zeigt, dafs die Charakteristik des Punktetripels $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}_l$ in den Fällen a) und b) jedesmal leicht anzugeben, dafs sie im Falle c) dagegen nicht bestimmt ist.

Liegt endlich im dritten Falle ein Punkt $\mathfrak{p}_i$ aufserhalb der alle übrigen $n-1$ Punkte enthaltenden Geraden $|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|$ und ist sein Index

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_{k'}, \quad \mathfrak{p}_{k''}, \ldots, \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_{l'}, \quad \mathfrak{p}_{l''}, \ldots,$$

so besteht für das Charakteristikensystem der Tripel

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k'}; \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k'}, \mathfrak{p}_{k''}; \ldots; \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_{l'}; \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{l'}, \mathfrak{p}_{l''}; \ldots$$

eine $n-1$ deutige Möglichkeit.

Indem man daher von allen denjenigen Systemen $\mathfrak{P}_n$ absieht, in welchen sich die n Punkte auf je zwei Gerade und zwar so verteilen, dafs der Schnittpunkt dieser für ihre Punktsysteme ein gemeinsames Grenzelement darstellt, erhält man den fundamentalen Satz:

Theorem 2: In einem ebenen Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

stehen das Charakteristikensystem der $\binom{n}{3}$ Punktetripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4; \ldots; \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n$$

und das System der n Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1), \quad 'J(\mathfrak{p}_2), \ldots, 'J(\mathfrak{p}_n)$$

in eindeutig umkehrbarer Abhängigkeit.

Die Beschreibung eines Punktsystemes aus seinem Indexsysteme kann durch passende Auswahl der zu diskutierenden Punktequadrupel wesentlich vereinfacht werden.

Man setze — dem allgemeinsten Fall zu genügen — das Punktsystem als lineal unabhängig voraus und bestimme entsprechend dem Index

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_{a_3}, \mathfrak{p}_{a_4}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_n}$$

unter Adjunktion des Punktes $\mathfrak{p}_2$ die Vorzeichen der $n-2$ Punktefolgen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_{a_3}; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_3}, \mathfrak{p}_{a_4}; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_4}, \mathfrak{p}_{a_5}; \ldots; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_{n-1}}, \mathfrak{p}_{a_n}.$$

Dieselben seien gegeben durch resp.

$$c_2, c_3, c_4, \ldots, c_{n-1}.$$

In bezug auf zwei benachbarte Folgen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_{i-1}}, \mathfrak{p}_{a_i} \text{ und } \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_i}, \mathfrak{p}_{a_{i+1}}$$

giebt nun die Anschauung den Satz:

Je nachdem die den beiden Folgen zugehörigen Vorzeichen

$$c_{i-1} \quad \text{und} \quad c_i$$

eine Zeichenfolge oder einen Zeichenwechsel ergeben, ist die Punktefolge

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_{a_i-1}, \quad \mathfrak{p}_{a_i+1}$$

durch das positive bezw. durch das negative Zeichen charakterisiert.

Die wiederholte Anwendung dieses Kriteriums führt zu dem allgemeineren:

Je nachdem in der Zeichenreihe

$$c_i, \; c_{i+1}, \; c_{i+2}, \; \ldots, \; c_k$$

eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Zeichenwechseln statthat, kommt einer Punktefolge

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_{a_i}, \quad \mathfrak{p}_{a_k}$$

das positive oder das negative Vorzeichen zu.

Nachdem vermittelst dieser Beziehungen erst die Charaktere aller Punktetripel $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$ bestimmt worden, ergiebt sich das Zeichen einer Folge $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$ schon aus dem Vergleiche des Index eines der drei Punkte mit demjenigen des Punktes $\mathfrak{p}_1$. Denn je nachdem die Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_i)$$

die Punkte

$$\mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_l$$

in gleicher oder in entgegengesetzter Folge enthalten, liegen diese auf ein und derselben oder auf verschiedenen Seiten der Geraden

$$|\mathfrak{p}_k, \; \mathfrak{p}_l|,$$

und es hat also das Tripel

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

mit dem anderen

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

den gleichen oder den entgegengesetzten Charakter.

Die vorstehenden allgemein stets anwendbaren Methoden werden in speziellen Fällen oft durch der Natur des betreffenden Falles sich anpassende einfachere zu ersetzen sein. So liefert beispielsweise das Indexsystem

$$\begin{aligned}
'J(\mathfrak{p}_1) &= \mathfrak{p}_2, \; \mathfrak{p}_3, \; \ldots, \; \mathfrak{p}_{n-1}, \; \mathfrak{p}_n, \\
'J(\mathfrak{p}_2) &= \mathfrak{p}_3, \; \mathfrak{p}_4, \; \ldots, \; \mathfrak{p}_n, \quad \mathfrak{p}_1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
'J(\mathfrak{p}_n) &= \mathfrak{p}_1, \; \mathfrak{p}_2, \; \ldots, \; \mathfrak{p}_{n-2}, \; \mathfrak{p}_{n-1}
\end{aligned}$$

für ein beliebiges Elementequadrupel

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m$$
$$(i < k < l < m)$$

das andere

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i,$$
$$'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \quad 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l.$$

Letzteres aber läfst sich in der Form schreiben:

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,$$
$$'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \quad 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$$

und bestimmt somit die Folge

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

als positiv elliptisch.

Wenn in der Folge ein Punktsystem durch sein Indexsystem definiert erscheint, werden die Charakteristiken der Punktetripel gleichfalls als schon bekannt vorausgesetzt.

Während die Beschreibung eines bestimmten Punktsystemes aus den Indices seiner Elemente die Kenntnis des Drehungssinnes jedes einzelnen verlangt, sind die Lösungen vieler anderer Probleme von dieser Voraussetzung unabhängig. Es ist deshalb oft zweckmäfsig, den Index eines Punktes in der unbestimmten (doppeldeutigen) Form zu schreiben:

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1^{(i)}, \quad \mathfrak{p}_2^{(i)}, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_{n-1}^{(i)}.$$

Man erkennt leicht, dafs das aus dem Indexsysteme

$$'J(\mathfrak{p}_1), \quad 'J(\mathfrak{p}_2), \ \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_n)$$

einer vorliegenden Punktgruppe

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_n$$

entstehende 2^n-deutige System

$$J(\mathfrak{p}_1), \quad J(\mathfrak{p}_2), \ \ldots, \ J(\mathfrak{p}_n)$$

mindestens ebensoviele realisierbare Indicesreihen umfafst, als die gegebene Punktegruppe verschiedene ebene Centralprojektionen besitzt. — Denn teilt die durch das Perspektivitätscentrum zur Projektionsebene E' gelegte Parallele E'' das Gebilde

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_n$$

in die beiden Gruppen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m+2}, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_n,$$

so gelten für die in der Ebene E' durch deren Durchschnitt mit der ursprünglichen E getrennten entsprechenden Punktegruppen

$$\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \ldots, \mathfrak{p}'_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}'_{m+1}, \mathfrak{p}'_{m+2}, \ldots, \mathfrak{p}'_n$$

die Beziehungen:

$$'J(\mathfrak{p}'_h) = 'J(\mathfrak{p}_h) \quad \text{und} \quad J'(\mathfrak{p}'_{m+h}) = 'J(\mathfrak{p}_{m+h}),$$
$$h = 1, 2, \ldots, m, \qquad h = 1, 2, \ldots, n - m.$$

Es wird dieser Zusammenhang zwischen dem erweiterten und dem eigentlichen Indexsysteme weiter unten in § 11 noch eingehend diskutiert werden.

---

§ 4. Primäre Punktgruppen.

Eine erste vorteilhafte Anwendung der aufgestellten Begriffe bietet die Lösung der Aufgabe:

Die durch ein beliebig gegebenes Punktsystem

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

bedingte Einteilung des ebenen Strahlenfeldes in ein System einander ausschliefsender Strahlenbereiche vollständig zu beschreiben.

Das Problem entspringt aus folgender Definition:

Zwei aufserhalb der n Punkte $\mathfrak{p}_i$ beliebig in der Ebene gewählte Geraden g_1 und g_2 gehören den nämlichen oder verschiedenen primären Strahlenbereichen S an, je nachdem sie entweder ohne oder nur mittelst Durchganges durch einen Punkt $\mathfrak{p}_i$ stetig ineinander überführbar sind.

Da die Geraden in bezug auf den Punkt $\mathfrak{p}_1$ und irgend einen zweiten Punkt $\mathfrak{p}_i$ von deren zwei Verbindungsstrecken

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i|_1 \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i|_2$$

a) im ersten Falle notwendig ein und dieselbe,

b) im zweiten notwendig beide treffen,

da somit die n Punkte $\mathfrak{p}$ des Systemes $\mathfrak{P}_n$ rücksichtlich der von g_1 und g_2 gebildeten zwei Flächen

$$(g_1, g_2)_1 \quad \text{und} \quad (g_1, g_2)_2$$

gemäfs den beiden unterschiedenen Fällen

a) entweder nur einer einzigen angehören,

b) oder sich auf beide verteilen,

so können die beiden Geraden zu demselben oder zu verschiedenen

Bereichen S gerechnet werden, wenn bei irgend einer um ihren Schnittpunkt ausgeführten Drehung der einen in die andere Gerade

a) entweder kein — b) oder mindestens ein —

Punkt $\mathfrak{p}_i$ passiert wird.

Hiernach ist als der primäre Strahlenbereich S_g einer keinen Punkt $\mathfrak{p}_i$ enthaltenden Geraden g die Gesamtheit derjenigen Geraden, und unter der ihn abgrenzenden primären Punktgruppe das System derjenigen Punkte $\mathfrak{p}_i$ zu verstehen, in welche die Gerade g bei stetiger Bewegung ohne vorherigen Durchgang durch einen solchen Punkt übergehen kann.

Behufs genauerer Bestimmung des Bereiches S_g fasse man die auf verschiedenen Seiten der Geraden g gelegenen Punkte zu resp. den Gruppen zusammen:

$$\mathfrak{P}' \equiv \mathfrak{p}_1', \quad \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{n_1}', \quad {}'\mathfrak{P} \equiv {}'\mathfrak{p}_1, \quad {}'\mathfrak{p}_2, \ldots, {}'\mathfrak{p}_{n_2}.$$

Zwei um diese beiden Gruppen geschlungene Fäden lassen sich auf zwei sie umschliefsende durch resp. m_1 und m_2 Punkte eindeutig bestimmte Polygone zusammenziehen, und letztere werden durch ihre beiden inneren gemeinsamen Tangenten

$$|\mathfrak{p}_1', {}'\mathfrak{p}_{a_2}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_{a_1}', {}'\mathfrak{p}_1|$$

in bezug auf die Gerade g in je einen konvexen und einen konkaven Zug zerlegt.

Alsdann bestimmen die Ecken der beiden konvexen Züge

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{a_1}' \quad \text{und} \quad {}'\mathfrak{p}_1, {}'\mathfrak{p}_2, \ldots, {}'\mathfrak{p}_{a_2}$$

die aufeinanderfolgenden Grenzelemente des gesuchten Strahlenbereiches S_g.

In der That teilt jede Seite

$$|\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i+1}'| \quad \text{oder} \quad |{}'\mathfrak{p}_k, {}'\mathfrak{p}_{k+1}|$$

des resultierenden Primär-m-Ecks

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{a_1}', \quad {}'\mathfrak{p}_1, {}'\mathfrak{p}_2, \ldots, {}'\mathfrak{p}_{a_2}$$
$$(a_1 + a_2 = m)$$

das Punktsystem $\mathfrak{P}_n$ gleichfalls in die Gruppen

$$\mathfrak{P}' \quad \text{und} \quad {}'\mathfrak{P},$$

so dafs von den beiden durch g und die betreffende Seite gebildeten Zweiseiten das eine alle, das andere keinen Punkt $\mathfrak{p}$ enthält, und folglich g durch blofse Drehung um den Schnittpunkt

$$(g, |\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i+1}'|) \quad \text{oder} \quad (g, |{}'\mathfrak{p}_k, {}'\mathfrak{p}_{k+1}|)$$

ohne Durchgang durch einen anderen Punkt $\mathfrak{p}$ direkt in eine Ecke

$$\mathfrak{p}_i' \quad \text{oder} \quad {}'\mathfrak{p}_k$$

übergeführt werden kann.

Eine nähere Betrachtung der den Bereich S_g begrenzenden Punktgruppe läfst folgende zwei charakteristische Eigenschaften derselben erkennen:

1) in den beiden Teilzügen

$${}'\mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{a_1}', {}'\mathfrak{p}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{a_1}', {}'\mathfrak{p}_1, {}'\mathfrak{p}_2, \ldots, {}'\mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_1'$$

sind von je drei aufeinanderfolgenden Elementen

$$\mathfrak{p}_{i-1}', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i+1}' \quad \text{und} \quad {}'\mathfrak{p}_{k-1}, {}'\mathfrak{p}_k, {}'\mathfrak{p}_{k+1}$$

das erste und das dritte allemal Nachbarelemente in dem Index des zweiten, jedoch stets in entgegengesetzter Reihenfolge:

$$J'(\mathfrak{p}_i') = \cdots, \mathfrak{p}_{i-1}', \mathfrak{p}_{i+1}', \ldots, \qquad {}'J({}'\mathfrak{p}_k) = \cdots, {}'\mathfrak{p}_{k-1}, {}'\mathfrak{p}_{k+1}, \ldots,$$
$$i = 1, 2, \ldots, a_1, \qquad k = 1, 2, \ldots, a_2;$$

und

2) die Charakteristiken der Punktefolgen

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3'; \quad \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4'; \ldots; \quad \mathfrak{p}_{a_1-2}', \mathfrak{p}_{a_1-1}', \mathfrak{p}_{a_1}';$$
$$\mathfrak{p}_{a_1-1}', \mathfrak{p}_{a_1}', {}'\mathfrak{p}_1; \quad \mathfrak{p}_{a_1}', {}'\mathfrak{p}_1, {}'\mathfrak{p}_2;$$
$${}'\mathfrak{p}_1, {}'\mathfrak{p}_2, {}'\mathfrak{p}_3; \quad {}'\mathfrak{p}_2, {}'\mathfrak{p}_3, {}'\mathfrak{p}_4; \ldots; \quad {}'\mathfrak{p}_{a_2-2}, {}'\mathfrak{p}_{a_2-1}, {}'\mathfrak{p}_{a_2};$$
$${}'\mathfrak{p}_{a_2-1}, {}'\mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_1'; \quad {}'\mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2'$$

sind resp.:

$$\begin{array}{c} -1, \quad -1, \quad \ldots, \quad -1; \\ +1, \qquad -1; \\ +1, \quad +1, \quad \ldots, \quad +1; \\ -1, \qquad +1. \end{array}$$

In den besonderen Fällen

$$1) \quad a_2 = 2, \qquad 2) \quad a_2 = 1, \qquad 3) \quad a_2 = 0$$

reduzieren sich die Charakteristikensysteme auf:

1) $\cdots, -1, -1, +1, -1, -1, +1, -1, -1, \cdots;$

2) $\cdots, -1, -1, +1, +1, +1, -1, \quad -1, \cdots;$

3) $-1, -1, \cdots, -1, -1.$

Umgekehrt ist ersichtlich, dafs jede beiden Bedingungen genügende cyklische Punktefolge

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{a_1}', {}'\mathfrak{p}_1, {}'\mathfrak{p}_2, \ldots, {}'\mathfrak{p}_{a_2}$$

notwendig die begrenzende Punktgruppe eines primären Strahlenbereiches S_g darstellt. — Denn da bei jedem stetigen Übergange

zweier Geraden der Ebene in einander allemal eines der beiden anfänglich von ihnen gebildeten Zweiseite vollständig durchstrichen wird, bei der mittelst successiver negativer Drehung um die Punkte

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{a_1}'$$

erfolgenden Überführung einer veränderlichen Geraden g aus der Lage

$$|\mathfrak{p}_1', {}'\mathfrak{p}_{a_2}| \equiv g_1$$

in die andere

$$|\mathfrak{p}_{a_1}', {}'\mathfrak{p}_1| \equiv g_2$$

aber kein einziger Punkt $\mathfrak{p}$ passiert wird, mufs eine der beiden Flächen

$$F_1(g_1, g_2) \quad \text{und} \quad F_2(g_1, g_2)$$

von Punkten $\mathfrak{p}$ vollständig frei sein.

Gleichzeitig folgt aus der Definition des Systemes

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{a_1}',$$
$${}'\mathfrak{p}_1, {}'\mathfrak{p}_2, \ldots, {}'\mathfrak{p}_{a_2},$$

dafs die Punkte der ersten Reihe zur Rechten der Geraden g_1 und zur Linken der Geraden g_2, die Punkte der zweiten aber zur Linken der Geraden g_1 und zur Rechten der Geraden g_2 liegen, dafs demnach die ersteren dem einen, die letzteren dem anderen der die Fläche $F_2(g_1, g_2)$ bildenden zwei Scheitelwinkel angehören. Infolgedessen wird eine durch den Schnittpunkt (g_1, g_2) innerhalb der Fläche $F_1(g_1, g_2)$ gezogene Gerade g gleichfalls zwischen den beiden Punktgruppen hindurchgehen, und es werden die vollständigen zu g gehörigen beiderseitigen Systeme

$$\mathfrak{P}_g' \quad \text{und} \quad {}'\mathfrak{P}_g$$

von zwei einfachen konvexen Polygonen eingeschlossen sein, deren zwei gemeinsame innere Tangenten mit den Geraden g_1 und g_2 zusammenfallen.

In den die beiden Eckenpaare

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_1}' \quad \text{und} \quad {}'\mathfrak{p}_1, {}'\mathfrak{p}_{a_2}$$

verbindenden bis auf die ersten Kanten nach g zu konvexen Zügen

$${}'\mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_1', \mathfrak{q}_2', \mathfrak{q}_3', \ldots, \mathfrak{p}_{a_1}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{a_1}', {}'\mathfrak{p}_1, {}'\mathfrak{q}_2, {}'\mathfrak{q}_3, \ldots, {}'\mathfrak{p}_{a_2}$$

ist aber jede folgende aus den zwei vorhergehenden Ecken genau durch denselben Prozefs eindeutig definiert, wie resp. in den anderen

$${}'\mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{a_1}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{a_1}', {}'\mathfrak{p}_1, {}'\mathfrak{p}_2, \ldots, {}'\mathfrak{p}_{a_2}.$$

Es folgt daher successive:

$$\mathfrak{q}_2' \equiv \mathfrak{p}_2', \mathfrak{q}_3' \equiv \mathfrak{p}_3', \cdots \quad \text{und} \quad {}'\mathfrak{q}_2 \equiv {}'\mathfrak{p}_2, {}'\mathfrak{q}_3 \equiv {}'\mathfrak{p}_3, \cdots. \quad \text{Q. e. d.}$$

Die angegebenen zwei Eigenschaften einer primären Punktgruppe machen es möglich, aus dem Indexsysteme eines Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ und den Charakteristiken seiner Punktetripel successive alle primären Strahlenbereiche abzulesen, welche in dem Punkte $\mathfrak{p}_n$ ein gemeinsames Grenzelement besitzen. Besagte Eigenschaften involvieren nämlich die folgende allgemeine Regel:

Man bestimme im Systeme $\mathfrak{P}_n$ ausgehend von dem Punktepaare

$$\mathfrak{p}_n, \ \mathfrak{p}_1$$

die beiden Folgen

$$1) \ \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_2', \ldots, \mathfrak{r}_\varrho', \mathfrak{r}_1'',$$
$$2) \ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2', \ldots, \mathfrak{f}_\sigma', \mathfrak{f}_1''$$

gemäfs den Bedingungen:

$$1\alpha) \ 'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{r}_1', \ldots, \quad 'J(\mathfrak{r}_1') = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{r}_2', \ldots, \quad 'J(\mathfrak{r}_2') = \mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_3', \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots, \quad 'J(\mathfrak{r}_{\varrho-1}') = \mathfrak{r}_{\varrho-2}', \mathfrak{r}_\varrho', \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{r}_\varrho') = \mathfrak{r}_{\varrho-1}', \mathfrak{r}_1'', \ldots,$$

$$\beta) \ c(\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{r}_1') = +1, \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_2') = +1, \quad c(\mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_2', \mathfrak{r}_3') = +1, \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots, \quad c(\mathfrak{r}_{\varrho-2}', \mathfrak{r}_{\varrho-1}', \mathfrak{r}_\varrho') = +1,$$
$$c(\mathfrak{r}_{\varrho-1}', \mathfrak{r}_\varrho', \mathfrak{r}_1'') = -1;$$

$$2\alpha) \ 'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{f}_1', \mathfrak{p}_1, \ldots, \quad 'J(\mathfrak{f}_1') = \mathfrak{f}_2', \mathfrak{p}_n, \ldots, \quad 'J(\mathfrak{f}_2') = \mathfrak{f}_3', \mathfrak{f}_1', \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots, \quad 'J(\mathfrak{f}_{\sigma-1}') = \mathfrak{f}_\sigma', \mathfrak{f}_{\sigma-2}', \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{f}_\sigma') = \mathfrak{f}_1'', \mathfrak{f}_{\sigma-1}', \ldots,$$

$$\beta) \ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{f}_1') = -1, \quad c(\mathfrak{p}_n, \mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2') = -1, \quad c(\mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2', \mathfrak{f}_3') = -1, \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots, \quad c(\mathfrak{f}_{\sigma-2}', \mathfrak{f}_{\sigma-1}', \mathfrak{f}_\sigma') = -1,$$
$$c(\mathfrak{f}_{\sigma-1}', \mathfrak{f}_\sigma', \mathfrak{f}_1'') = +1,$$

und setze darauf erstere fort in den beiden Reihen

$$1') \ \mathfrak{r}_1'', \mathfrak{r}_2'', \mathfrak{r}_3'', \ldots.$$
$$2') \ \mathfrak{f}_1'', \mathfrak{f}_2'', \mathfrak{f}_3'', \ldots.$$

gemäfs den veränderten Bedingungen:

$$1'\alpha) \ 'J(\mathfrak{r}_1'') = \mathfrak{r}_2'', \mathfrak{r}_\varrho', \ldots, \quad 'J(\mathfrak{r}_2'') = \mathfrak{r}_3'', \mathfrak{r}_1'', \ldots, \quad 'J(\mathfrak{r}_3'') = \mathfrak{r}_4'', \mathfrak{r}_2'', \ldots,$$

$$\beta) \ c(\mathfrak{r}_\varrho', \mathfrak{r}_1'', \mathfrak{r}_2'') = +1, \quad c(\mathfrak{r}_1'', \mathfrak{r}_2'', \mathfrak{r}_3'') = -1,$$
$$c(\mathfrak{r}_2'', \mathfrak{r}_3'', \mathfrak{r}_4'') = -1, \ldots,$$

$$2'\alpha) \ 'J(\mathfrak{f}_1'') = \mathfrak{f}_\sigma', \mathfrak{f}_2'', \ldots, \quad 'J(\mathfrak{f}_2'') = \mathfrak{f}_1'', \mathfrak{f}_3'', \ldots, \quad 'J(\mathfrak{f}_3'') = \mathfrak{f}_2'', \mathfrak{f}_4'', \ldots,$$

$$\beta) \ c(\mathfrak{f}_\sigma', \mathfrak{f}_1'', \mathfrak{f}_2'') = -1, \quad c(\mathfrak{f}_1'', \mathfrak{f}_2'', \mathfrak{f}_3'') = +1,$$
$$c(\mathfrak{f}_2'', \mathfrak{f}_3'', \mathfrak{f}_4'') = +1, \ldots.$$

Alsdann werden beide Reihen in einem und demselben von allen vorhergehenden verschiedenen Elemente endigen.

Vereinigt man nämlich die zur Linken und Rechten der Geraden $|\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1|$ liegenden Punkte $\mathfrak{p}_i$ zu resp. den Gruppen

$$'\mathfrak{P}_{n,1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}'_{n,1},$$

so wird der die beiden Gruppen

$$'\mathfrak{P}_{n,1}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}'_{n,1}$$

trennende Strahlenbereich von einer mit den beiden abgeleiteten identischen Punktgruppe I begrenzt.

Ein Wechsel der ursprünglich in den Indices

$$J(\mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_1)$$

eingeschlagenen Fortschreitungsrichtungen,

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{r}_1', \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{f}_1', \mathfrak{p}_1, \ldots$$

d. h. die Darstellung des Indexsystemes in der Form

$$\begin{aligned} J'(\mathfrak{p}_1) &= \mathfrak{p}_n, \bar{\mathfrak{r}}_1, \ldots, & J'(\mathfrak{p}_n) &= \bar{\mathfrak{f}}_1, \mathfrak{p}_1, \ldots, \\ J'(\bar{\mathfrak{r}}_1) &= \mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{r}}_2, \ldots, & J'(\bar{\mathfrak{f}}_1) &= \bar{\mathfrak{f}}_2, \mathfrak{p}_n, \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots

das System $\mathfrak{P}_n$ stets auf andere Weise in zwei Gruppen teilen, so wird die successive Ausführung der beiden vorbeschriebenen Methoden an den $n-1$ in ebensovielen diskreten Geraden annehmbaren Punktepaaren

$$\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1; \quad \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_2; \quad \ldots; \quad \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{n-1}$$

in den $2n-2$ resultierenden Primärvielecken auch wirklich alle diejenigen ergeben, welche den Punkt $\mathfrak{p}_n$ enthalten, und zwar wird dabei jedes genau einmal auftreten.

Die so erhaltenen $2n-2$ Gebilde ordnen sich um die einzelnen Punktepaare $\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_i$ zu je vieren derart an, dafs, wenn wieder die zur Linken und Rechten der Geraden $|\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_i|$ vorhandenen Punkte resp. zu den Gruppen

$$'\mathfrak{P}_{n,i} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}'_{n,i}$$

zusammengefafst werden, die vier Zerlegungen des Systemes $\mathfrak{P}_n$ in die Bestandteile

I. $'\mathfrak{P}_{n,i}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{P}'_{n,i}$, II. $'\mathfrak{P}_{n,i}$ und $\mathfrak{P}'_{n,i}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_i$,
III. $'\mathfrak{P}_{n,i}, \mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{P}'_{n,i}, \mathfrak{p}_i$, IV. $'\mathfrak{P}_{n,i}, \mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{P}'_{n,i}, \mathfrak{p}_n$

vier bezügliche Primärpolygone definieren. In diesen vollzieht sich der Übergang der allen vier gemeinsamen Seite

$$|\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_i|$$

in die ihr jedesmal benachbarten zwei anderen Seiten

$$|\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_k| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l|$$

I. durch negative und positive,
II. durch positive und negative,
III. durch positive und positive,
IV. durch negative und negative

Umdrehung in resp. den beiden Strahlenbüscheln

$$S(\mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad (S\mathfrak{p}_i).$$

Infolgedessen haben entsprechend dem Index

$$'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$$

1) die Primärvielecke I und IV den Primärwinkel $\mathfrak{p}_n|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i-1}|$,
2) die anderen II und III den Primärwinkel $\mathfrak{p}_n|\mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_i|$

zu einem gemeinsamen Grenzwinkel.

Schliefst man den Punkt $\mathfrak{p}_n$ aus dem Systeme $\mathfrak{P}_n$ aus, so vereinigen sich von je vier Strahlenbereichen

I, II, III, IV

sowohl I und IV als II und III zu je einem primären Strahlenbereiche des Systemes $\mathfrak{P}_{n-1}$, und es reduziert sich somit die Bestimmung der Primärgruppen des Systemes $\mathfrak{P}_n$ auf diejenige der noch übrigen analogen Gruppen im Systeme $\mathfrak{P}_{n-1}$. Q. e. d.

Die vorstehende Methode wird durch die Annahme von $m \geqq 3$ Punkten $\mathfrak{p}$ auf einer einzigen Geraden g nicht wesentlich alteriert. — Denn sind $'\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ die zu beiden Seiten der Geraden liegenden Punktgruppen, und ist die Reihenfolge der Punkte auf g zwischen den beiden äufsersten Grenzpunkten

$$\bar{\mathfrak{p}}_1 \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{p}}_m$$

gegeben durch

$$\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \bar{\mathfrak{p}}_3, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_m,$$

so teile man letztere in zwei Folgen

$$\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_h \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{p}}_{h+1}, \bar{\mathfrak{p}}_{h+2}, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_m,$$
$$(h = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

und verbinde diese mit

$$\mathfrak{P}' \quad \text{und} \quad '\mathfrak{P}$$

zu den Gruppen

$$\text{a)}\ \mathfrak{P}', \bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_h \quad \text{und} \quad '\mathfrak{P}, \bar{\mathfrak{p}}_{h+1}, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_m,$$
$$\text{b)}\ \mathfrak{P}', \bar{\mathfrak{p}}_{h+1}, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_m \quad \text{und} \quad '\mathfrak{P}, \bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_h.$$

Alsdann bestimmen die $2 \cdot m$ resultierenden Gruppenpaare ebensoviele primäre Strahlenbereiche. Demgemäfs wird man bei Ableitung der zu einer Teilung

$$'\mathfrak{P}, (\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_h) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}', (\bar{\mathfrak{p}}_{h+1}, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_m)$$

gehörigen Primärgruppe aus dem Indexsysteme

$$J'(\mathfrak{p}_1), J'(\mathfrak{p}_2), \ldots, J'(\mathfrak{p}_n)$$

die Elemente

$$\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_{h-1} \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{p}}_{h+2}, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_{m-1}, \bar{\mathfrak{p}}_m$$

überhaupt aufser Acht lassen.

Das oben beispielsweise behandelte Indexsystem

$$\begin{aligned}
'J(\mathfrak{p}_1) &= \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n, \\
'J(\mathfrak{p}_2) &= \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
'J(\mathfrak{p}_n) &= \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}
\end{aligned}$$

ergiebt

a) für den Fall $k - i \gtrless 3$:

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_{k-1}, \mathfrak{p}_k, \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots,$$
$$c(\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k-1}) = +1, \quad c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{i+1}) = -1,$$
$$'J(\mathfrak{p}_{k-1}) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_{i+1}) = \mathfrak{p}_{k-1}, \mathfrak{p}_k, \ldots,$$
$$c(\mathfrak{p}_{k-1}, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) = +1, \quad c(\mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k-1}) = -1,$$

b) für den Fall $k - i = 2$:

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i+2}, \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_{i+2}) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots;$$

c) für den Fall $k - i = 1$:

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i+2}, \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_{i+1}) = \mathfrak{p}_{i+2}, \mathfrak{p}_{i+3}, \ldots,$$
$$c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i+2}) = +1, \quad c(\mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i+2}, \mathfrak{p}_{i+3}) = +1,$$
$$'J(\mathfrak{p}_{i+2}) = \mathfrak{p}_{i+3}, \mathfrak{p}_{i+4}, \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_{i+3}) = \mathfrak{p}_{i+4}, \mathfrak{p}_{i+5}, \ldots,$$
$$c(\mathfrak{p}_{i+2}, \mathfrak{p}_{i+3}, \mathfrak{p}_{i+4}) = +1, \quad c(\mathfrak{p}_{i+3}, \mathfrak{p}_{i+4}, \mathfrak{p}_{i+5}) = +1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_{i-2}) = \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i, \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_{i-1}) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots,$$
$$c(\mathfrak{p}_{i-2}, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i) = +1, \quad c(\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) = +1.$$

Es resultieren mithin als primäre Punktgruppen:

a) die $\frac{1}{2}n(n-3)$ Punktequadrupel

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k \,|\, \mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{k-1},$$

b) die n Punktetripel

$$\mathfrak{p}_i \,|\, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1},$$

c) das primäre n Eck

$$\mathfrak{p}_\infty \,|\, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n.$$

Es mag noch hervorgehoben werden, dafs in bezug auf irgend eine primäre Punktgruppe

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{a_1}',$$
$$'\mathfrak{p}_1, '\mathfrak{p}_2, \ldots, '\mathfrak{p}_{a_2}$$

die Lage jedes anderen Punktes $\mathfrak{p}_x$ bestimmt wird durch die Beziehungen:

$$c(\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}') = \pm 1 = c(\mathfrak{p}_x, '\mathfrak{p}_{k_1}, '\mathfrak{p}_{k_2})$$
$$i_2 - i_1 \gtrless 1, \qquad k_2 - k_2 \gtrless 1,$$

die Lage eines Punktes der Gruppe selbst aber durch:

a) $c(\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}') = +1 = -c(\mathfrak{p}_i', '\mathfrak{p}_{k_1}, '\mathfrak{p}_{k_2}), \quad i_1 < i < i_2,$

b) $c('\mathfrak{p}_k, '\mathfrak{p}_{k_1}, '\mathfrak{p}_{k_2}) = -1 = -c('\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}'), \quad k_1 < k < k_2.$

Im Besonderen findet man hinsichtlich eines primären Punktetripels

$$\mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$$

die Formeln:

$$c(\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = \pm 1, \quad c(\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = \mp 1, \quad c(\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1) = \pm 1,$$
$$(x = 4, 5, \ldots, n).$$

wo in den einzelnen Relationen entweder stets das obere oder das untere Vorzeichen gilt.

Die Gesamtzahl der Primärgruppen eines Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ läfst sich unabhängig von ihrer Beschreibung im Einzelnen unmittelbar aus dessen Singularitäten durch folgende Überlegung finden:

Es bilden die Strahlen eines aufserhalb jeder Geraden $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$ gelegenen Punktes n primäre Teilbüschel, welche resp. ebensovielen primären Strahlenbereichen von $\mathfrak{P}_n$ zugehören. Demzufolge zerfallen die Punkte einer durch keinen Punkt $\mathfrak{p}$ laufenden Geraden g gegenüber einem g nicht enthaltenden primären Strahlenbereiche S_g in zwei getrennte Kontinuen, nämlich in eine Strecke von Innen- und in eine Strecke von Aufsenpunkten, welche durch die Schnittpunkte der Geraden g mit zwei Seiten des S_g begrenzenden Primärpolygones getrennt werden. Eine Ausnahme hiervon findet nur rücksichtlich des zu der Geraden selbst gehörigen Strahlenbereiches S_g statt.

Da hiernach ein die Gerade g einfach und in bestimmter Richtung durchlaufender Punkt einmal in jeden Bereich S_g ein- und einmal aus jedem solchen austritt und da er beim Passieren einer i Punkte $\mathfrak{p}$ verbindenden Geraden aus dem gemeinsamen inneren von $i-1$ Primärbereichen in das gemeinsame Innere von $i-1$ anderen übergeht, so berechnet sich die Gesamtzahl σ_2 der primären Strahlenbereiche des Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ durch die Formel:

$$1) \quad \sigma_2 = 1 + \sum_{i=2}^{n} (i-1) \cdot m_i,$$

wo m_i die Anzahl derjenigen Geraden angiebt, in welchen je i Punkte $\mathfrak{p}$ liegen.

Durch weitere Einführung der Anzahlen

$$2) \quad \sigma_1 *) = \sum_{i=2}^{n} i \cdot m_i \quad \text{und} \quad \sigma_0 = \sum_{i=2}^{n} m_i$$

*) Offenbar ist eine Gerade $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$ gemeinsamer Scheukel doppelt so vieler Primärwinkel als sie Scheitel $\mathfrak{p}_h$ solcher enthält. Es zählt daher der Aus-

aller Primärwinkel $\mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|$ und aller Grenzstrahlen $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$ des Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ erhält man aus (1) die dem Euler'schen Polyedersatze verwandte Relation:

$$3)\quad \sigma_2 - \sigma_1 + \sigma_0 = 1.$$

Als spezielle Anwendung der Formel (1) erhält man:

1) die Anzahl der primären Punktgruppen bei allgemeiner Lage der n Punkte $\mathfrak{p}_i$, nämlich

$$\sigma_2 = 1 + \frac{1}{2} n (n-1),$$

2) die entsprechende Anzahl für das Schnittpunktsystem von n lineal unabhängigen Geraden, nämlich

$$\sigma_2 = 1 + n (n-2) + \frac{n (n-1) (n-2) (n-3)}{2 \cdot 2 \cdot 2}.$$

Es werde in einem beliebig vorgelegten ebenen Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ die Anzahl der Primär-m-ecke mit x_m bezeichnet. Dann genügen die Werte

$$x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_n$$

offenbar den beiden Relationen:

$$1)\quad x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \cdots + x_n = \sigma_2,$$

$$2)\quad 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + \cdots + n \cdot x_n = 2\sigma_1.$$

Die Kombination derselben ergiebt:

$$3)\quad x_3 - x_5 - 2x_6 - 3x_7 - \cdots - (n-4)x_n = 4\sigma_2 - 2\sigma_1.$$

Man kann aber schreiben:

$$4)\quad 4\sigma_2 - 2\sigma_1 = 4 + 4\sum_{i=2}^{n}(i-1)\, m_i - 2\sum_{i=2}^{n} i \cdot m_i$$

$$= 4 + 2\sum_{i=2}^{n}(i-2)\, m_i = 4 + 2A.$$

Also geht die Relation (3) über in

$$5)\quad x_3 - x_5 - 2x_6 - \cdots - (n-4)\, x_n = 4 + 2A,$$

und es gilt der Satz:

---

druck $2 \cdot \sum_{i=2}^{n} i \cdot m_i$ die Schenkel sämtlicher Primärwinkel, jeden genau einmal,

und folglich der andere $\sum_{i=2}^{n} i \cdot m_i$ die Winkel selbst.

Theorem 3: In allen ebenen Punktsystemen der gleichen Singularität A hat der Ausdruck

$$x_3 - x_5 - 2x_6 - 3x_7 - \cdots$$

einen von der Anzahl und der gegenseitigen Lage der Punkte des Systemes völlig unabhängigen invarianten Wert.

Die volle Bedeutung und Tragweite des Satzes wird erst in dem dritten Abschnitt dargelegt werden.

Die durch ein Punktsystem

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

bedingte Einteilung des ebenen Strahlenfeldes in primäre Strahlenkontinuen mit wohldefinierten Grenzvielecken ist für alle perspektiven Bilder desselben im wesentlichen die gleiche. Nur die äufsere Gestalt eines Grenzpolygones kann insofern eine Änderung erfahren, als dessen natürliche Eckenfolge durch die Strahlen des zugehörigen Primärbereiches bei verschiedenen Projektionen auf verschiedene Weisen in je zwei getrennte Züge geteilt wird.

Im besonderen nimmt bei jeder Projektion das Grenzvieleck desjenigen primären Strahlenbereiches die einfache konvexe Form an, von dessen Elementen eines in die unendlich ferne Gerade der Projektionsebene übergeht.

§ 5. Abhängigkeiten zwischen den Indices der Elemente eines Punktsystemes.

Die im vorigen Paragraphen entwickelte Methode zur Bestimmung aller Primärvielecke einer gegebenen Punktgruppe $\mathfrak{P}_n$ läfst bei näherer Betrachtung eine wichtige Eigenschaft des zugehörigen Indexsystemes hervortreten.

Zunächst ergiebt sich, dafs sämtliche Primärpolygone von

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

bereits aus beliebigen $n-1$ Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1),\ 'J(\mathfrak{p}_2), \ldots, 'J(\mathfrak{p}_{n-1})$$

abgeleitet werden können.

Denn bestimmt man — dem allgemeinsten Falle entsprechend — in dem gegebenen Schema

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{p}_2',\ \mathfrak{p}_3',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-1}',$$
$$'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{p}_2'',\ \mathfrak{p}_3'',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-1}'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_{n-1}) = \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{p}_2^{(n-1)},\ \mathfrak{p}_3^{(n-1)},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-1}^{(n-1)}$$

(die Charakteristiken aller Punktetripel in der Gruppe

$$\mathfrak{P}_{n-1} = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-1}$$

sind dann gleichfalls als bekannt vorauszusetzen) ausgehend von irgend einem Punkte

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_1$$

eine stets mögliche Folge

$$\mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha,\ \mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_\beta,\ \mathfrak{f}_1,\ \mathfrak{f}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{f}_\gamma,\ \mathfrak{p}_n$$

gemäfs den Bedingungen:

$$'J(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_3,\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{q}_3) = \mathfrak{q}_2,\ \mathfrak{q}_4,\ \ldots,\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{q}_{\alpha-1}) = \mathfrak{q}_{\alpha-2},\ \mathfrak{q}_\alpha,\ \ldots,$$
$$c(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3) = c(\mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \mathfrak{q}_4) = \ldots = c(\mathfrak{q}_{\alpha-2}, \mathfrak{q}_{\alpha-1}, \mathfrak{q}_\alpha) = \varepsilon;$$
$$'J(\mathfrak{q}_\alpha) = \mathfrak{q}_{\alpha-1},\ \mathfrak{r}_1,\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{r}_1) = \mathfrak{r}_2,\ \mathfrak{q}_\alpha,\ \ldots,$$
$$-c(\mathfrak{q}_{\alpha-1}, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{r}_1) = \varepsilon = c(\mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2);$$
$$'J(\mathfrak{r}_2) = \mathfrak{r}_3,\ \mathfrak{r}_1,\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{r}_3) = \mathfrak{r}_4,\ \mathfrak{r}_2,\ \ldots,\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{r}_{\beta-1}) = \mathfrak{r}_\beta,\ \mathfrak{r}_{\beta-2},\ \ldots,$$
$$c(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3) = c(\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4) = \ldots = c(\mathfrak{r}_{\beta-2}, \mathfrak{r}_{\beta-1}, \mathfrak{r}_\beta) = -\varepsilon;$$
$$'J(\mathfrak{r}_\beta) = \mathfrak{f}_1,\ \mathfrak{r}_{\beta-1},\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{f}_1) = \mathfrak{r}_\beta,\ \mathfrak{f}_2,\ \ldots,$$
$$c(\mathfrak{r}_{\beta-1}, \mathfrak{r}_\beta, \mathfrak{f}_1) = \varepsilon = -c(\mathfrak{r}_\beta, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2);$$
$$'J(\mathfrak{f}_2) = \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_3, \ldots,\ 'J(\mathfrak{f}_3) = \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_4, \ldots,\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{f}_{\gamma-1}) = \mathfrak{f}_{\gamma-2},\ \mathfrak{f}_\gamma, \ldots,$$
$$c(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3) = c(\mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \mathfrak{f}_4) = \cdots = c(\mathfrak{f}_{\gamma-2}, \mathfrak{f}_{\gamma-1}, \mathfrak{f}_\gamma) = \varepsilon;$$
$$'J(\mathfrak{f}_\gamma) = \mathfrak{f}_{\gamma-1},\ \mathfrak{p}_n,\ \ldots,$$

wo ε die positive oder die negative Einheit bezeichnet, so folgt aus bekannten Schlüssen:

1) $c(\mathfrak{f}_{\gamma-1}, \mathfrak{f}_\gamma, \mathfrak{p}_n) = c(\mathfrak{f}_\gamma, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_1) = c(\mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) = \varepsilon,$
2) $'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{f}_\gamma,\ \mathfrak{q}_1,\ \ldots,$

und es stellt sich die gefundene Punktgruppe als eine primäre dar.

Indem man in diesem Verfahren zunächst die Fortschreitungsrichtung in dem Index des Ausgangspunktes $\mathfrak{q}_1$ umkehrt und darauf diesen selbst successive in alle Elemente von $\mathfrak{P}_{n-1}$ verlegt, wird man sämtliche $2n-2$ den Punkt $\mathfrak{p}_n$ enthaltende Primärpolygone und mit ihnen alle im Index $J(\mathfrak{p}_n)$ benachbarten Elementepaare, also auch diesen Index selbst eindeutig erhalten.

Es kann geschehen, dafs die für die Elementenreihe

$$\mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n$$

mafsgebenden Bedingungen die Formen annehmen:

1)
$$'J(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_3, \ldots,\quad 'J(\mathfrak{q}_3) = \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_4, \ldots,\ \ldots,\quad 'J(\mathfrak{q}_{\alpha-1}) = \mathfrak{q}_{\alpha-2}, \mathfrak{q}_\alpha, \ldots,$$
$$c(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3) = c(\mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \mathfrak{q}_4) = \cdots = c(\mathfrak{q}_{\alpha-2}, \mathfrak{q}_{\alpha-1}, \mathfrak{q}_\alpha) = \varepsilon;$$
$$'J(\mathfrak{q}_\alpha) = \mathfrak{q}_{\alpha-1},\ \mathfrak{r}_1,\ \ldots,\qquad 'J(\mathfrak{r}_1) = \mathfrak{r}_2,\ \mathfrak{q}_\alpha,\ \ldots,$$
$$-c(\mathfrak{q}_{\alpha-1},\ \mathfrak{q}_\alpha,\ \mathfrak{r}_1) = \varepsilon = c(\mathfrak{q}_\alpha,\ \mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_2);$$
$$'J(\mathfrak{r}_2) = \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_1, \ldots,\quad 'J(\mathfrak{r}_3) = \mathfrak{r}_4, \mathfrak{r}_2, \ldots,\ \ldots,\quad 'J(\mathfrak{r}_{\beta-1}) = \mathfrak{r}_\beta, \mathfrak{r}_{\beta-2}, \ldots,$$
$$c(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3) = c(\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4) = \cdots = c(\mathfrak{r}_{\beta-2}, \mathfrak{r}_{\beta-1}, \mathfrak{r}_\beta) = -\varepsilon;$$
$$'J(\mathfrak{r}_\beta) = \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{r}_{\beta-1};$$

2)
$$'J(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_3, \ldots,\quad 'J(\mathfrak{q}_3) = \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1, \ldots,\ \ldots,\quad 'J(\mathfrak{q}_{\alpha-1}) = \mathfrak{q}_{\alpha-2}, \mathfrak{q}_\alpha, \ldots,$$
$$c(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3) = c(\mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \mathfrak{q}_4) = \cdots = c(\mathfrak{q}_{\alpha-2}, \mathfrak{q}_{\alpha-1}, \mathfrak{q}_\alpha) = \varepsilon;$$
$$'J(\mathfrak{q}_\alpha) = \mathfrak{q}_{\alpha-1},\ \mathfrak{p}_n,\ \ldots;$$

oder 3)
$$'J(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_3, \ldots,\quad 'J(\mathfrak{q}_3) = \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_4, \ldots,\ \ldots,\quad 'J(\mathfrak{q}_{\alpha-1}) = \mathfrak{q}_{\alpha-2}, \mathfrak{q}_\alpha, \ldots,$$
$$c(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3) = c(\mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \mathfrak{q}_4) = \cdots = c(\mathfrak{q}_{\alpha-2}, \mathfrak{q}_{\alpha-1}, \mathfrak{q}_\alpha) = \varepsilon;$$
$$'J(\mathfrak{q}_\alpha) = \mathfrak{q}_{\alpha-1},\ \mathfrak{p}_n,\ \ldots.$$

In allen drei Fällen sind zwar die resultierenden Punktgruppen gleichfalls primäre, und demnach die Punktepaare

$$1)\ \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{r}_\beta,\quad 2)\ \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_\alpha,\quad 3)\ \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_\alpha$$

jedesmalige Nachbarelemente im gesuchten Index

$$J(\mathfrak{p}_n),$$

die Vorzeichen der Punktefolgen

$$1)\ \mathfrak{q}_{\beta-1}, \mathfrak{r}_\beta, \mathfrak{p}_n;\quad \mathfrak{r}_\beta, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_1;\quad \mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2;$$
$$2,\ 3)\ \mathfrak{q}_{\alpha-1}, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_n;\quad \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_1;\quad \mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2,$$

sowie der Drehungssinn von

$$J(\mathfrak{p}_n)$$

bleiben dagegen unbestimmt.

Berücksichtigt man, dafs Primärgruppen des speziellen Charakters nur und immer resultieren, wenn der Punkt $\mathfrak{p}_n$ zu dem Aufsenpolygone des Systemes $\mathfrak{P}_n$ gehört, dafs ferner dann von den ihn enthaltenden

$2n - 2$ Primärvielecken je eines, nämlich das Aufsenpolygon und das andere $\mathfrak{p}_n \,|\, \mathfrak{P}_{n-1}$, der zweiten und der dritten, alle übrigen aber der ersten Reihe von Bedingungen entsprechen, und dafs endlich die ausgeführten Deduktionen ihre Anwendbarkeit nicht verlieren, auch wenn in $\mathfrak{P}_n$ singuläre Punktetripel vorhanden sind, so schliefst man, alles zusammenfassend, den Satz:

Theorem 4: In jedem ebenen Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ ist der Index irgend eines Punktes durch diejenigen der $n - 1$ anderen bis auf seinen Drehungssinn unzweideutig bestimmt.

Die Einfachheit dieses Gesetzes und seine Bedeutung für die weiteren Entwickelungen läfst gegenüber dem vorstehenden komplizierten Beweisverfahren es zweckmäfsig erscheinen, die Ableitung des Satzes noch auf anderen direkteren Wegen zu versuchen.

Zweiter Beweis.

Dafs zwischen den n Indices $J(\mathfrak{p}_i)$ eines Systemes $\mathfrak{P}_n$ eine Abhängigkeit vorhanden und wie dieselbe im allgemeinen beschaffen sei, kann unmittelbar aus der Anschauung erkannt werden.

Zu dem Ende denke man sich in einem ganz beliebigen (einem allgemeinen oder singulären) Systeme von $n - 1$ Punkten

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$$

deren paarweise Verbindungsgeraden gezogen:

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2|, \ \ldots, \ |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|, \ \ldots, \ |\mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}|.$$

Die aus einem Grundpunkte nach den $n - 2$ anderen führenden m_i Geraden teilen die Ebene in m_i einander ausschliefsende zweiseitige Flächen, sogenannte Primärwinkel. Ein aufserhalb der Geraden $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$ beliebig gewählter Punkt $\mathfrak{p}_n$ der Ebene wird daher in den $n - 1$ Strahlenbüscheln $\mathfrak{p}_i$ genau $n - 1$ Primärwinkeln angehören, nämlich:

$$\mathfrak{p}_1 \,|\, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{k_1} \,|, \quad \mathfrak{p}_2 \,|\, \mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{k_2} \,|, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_{n-1} \,|\, \mathfrak{p}_{i_{n-1}}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{k_{n-1}} \,|.$$

Es kann der Punkt $\mathfrak{p}_n$ bei stetiger Bewegung weder eines dieser $n - 1$ Gebiete verlassen, noch auch in eine der aufserhalb derselben etwa vorhandenen Geraden $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$ eintreten, ohne eine der $2n - 2$-Geraden

$$|\mathfrak{p}_h, \mathfrak{p}_{i_h}|, \quad |\mathfrak{p}_h, \mathfrak{p}_{k_h}|$$

zu passieren. Die von letzteren um den Punkt $\mathfrak{p}_n$ abgegrenzte Fläche ist daher identisch mit dem ihn enthaltenden Primärgebiet $F(\mathfrak{p}_n)$ in dem Systeme aller Verbindungsgeraden $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$.

Offenbar stellt diese Fläche den ganzen gemeinsamen Deckungsbereich der vorgenannten $n-1$ Primärwinkel dar.

Denn genügen zwei Punkte $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{q}_n$ den Bedingungen

$$J(\mathfrak{p}_1) = \cdots, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_n, \mathfrak{p}_{k_1}, \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$J(\mathfrak{p}_{n-1}) = \cdots, \mathfrak{p}_{i_{n-1}}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_n, \mathfrak{p}_{k_{n-1}}, \cdots,$$

so wird die den Primärwinkeln gemeinsame endliche oder unendliche Verbindungsstrecke $\mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_n$ von keiner Geraden $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$ getroffen, und es können folglich $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{q}_n$ aufserhalb letzterer stetig ineinander übergehen.

Jede Primärfläche $F(\mathfrak{p}_n)$ in dem Systeme der Geraden

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2|, \ |\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3|, \ldots, |\mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}|$$

besitzt also ein ihr charakteristisches Indexsystem:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \cdots, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{k_1}, \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_{n-1}) = \cdots, \mathfrak{p}_{i_{n-1}}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{k_{n-1}}, \cdots$$

Sei der Index des Punktes $\mathfrak{p}_n$ gegeben durch:

$$'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1^{(n)}, \mathfrak{p}_2^{(n)}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}^{(n)}.$$

Derselbe wird bei stetiger Bewegung von $\mathfrak{p}_n$ solange invariant bleiben, als je zwei in ihm benachbarte Elemente

$$\mathfrak{p}_h^{(n)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{h+1}^{(n)}$$

ihre Aufeinanderfolge inne halten. Ein Wechsel in letzterer kann aber nur eintreten, indem der Punkt $\mathfrak{p}_n$

1) entweder eine der Geraden

$$|\mathfrak{p}_1^{(n)}, \mathfrak{p}_2^{(n)}|, \quad |\mathfrak{p}_2^{(n)}, \mathfrak{p}_3^{(n)}|, \ldots, |\mathfrak{p}_{n-2}^{(n)}, \mathfrak{p}_{n-1}^{(n)}|, \quad |\mathfrak{p}_{n-1}^{(n)}, \mathfrak{p}_1^{(n)}|,$$

2) oder die unendlich ferne Gerade passiert.

Im ersten Falle werden nur zwei, im zweiten je zwei benachbarte Elemente ihre Stellen vertauschen, und es wird demgemäfs der Index resultieren:

1) $'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1^{(n)}, \ldots, \mathfrak{p}_{h+1}^{(n)}, \mathfrak{p}_h^{(n)}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}^{(n)},$

2) $'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_{n-1}^{(n)}, \ldots, \mathfrak{p}_{h+1}^{(n)}, \mathfrak{p}_h^{(n)}, \ldots, \mathfrak{p}_1^{(n)}.$

Nun besitzt die den Punkt $\mathfrak{p}_n$ enthaltende Fläche $F(\mathfrak{p}_n)$,

a) wenn sie endlich, mindestens drei,

b) wenn sie unendlich, mindestens zwei

sie begrenzende Verbindungsgeraden $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$. In jede solche Gerade wird $\mathfrak{p}_n$ direkt, d. h. ohne Überschreiten einer anderen Geraden stetig übergehen können, und in seinem Index werden in diesem Falle nur die Elemente $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$ ihre Folge ändern.

Jede Grenzgerade der Fläche $F(\mathfrak{p}_n)$ mufs mithin zwei Nachbarelemente des Index $J(\mathfrak{p}_n)$ verbinden, und alle müssen deshalb enthalten sein unter den $n-1$ Geraden

$$|\mathfrak{p}_1^{(n)}, \mathfrak{p}_2^{(n)}|, \quad |\mathfrak{p}_2^{(n)}, \mathfrak{p}_3^{(n)}|, \ldots, |\mathfrak{p}_{n-1}^{(n)}, \mathfrak{p}_1^{(n)}|.$$

Nach Früherem ist bekannt, dafs, wenn zwei Punkte $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{q}_n$ auf verschiedenen Seiten einer Geraden $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$ liegen, ihre Indices $'J(\mathfrak{p}_n)$ und $'J(\mathfrak{q}_n)$ bei gleichem Anfangselemente $\mathfrak{p}_1$ die Punkte $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_k$ in entgegengesetzter Folge enthalten

$$'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_i, \ldots, \mathfrak{p}_k, \ldots;$$
$$'J(\mathfrak{q}_n) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k, \ldots, \mathfrak{p}_i, \ldots$$

Je nachdem daher die Indices zweier Punkte $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{q}_n$ die Formen haben

$$1) \quad \begin{matrix} 'J(\mathfrak{p}_n) \\ 'J(\mathfrak{q}_n) \end{matrix} = \mathfrak{p}_1^{(n)}, \ \mathfrak{p}_2^{(n)}, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_{n-1}^{(n)},$$

$$2) \quad \begin{matrix} 'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1^{(n)}, \ \mathfrak{p}_2^{(n)}, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_{n-1}^{(n)}, \\ 'J(\mathfrak{q}_n) = \mathfrak{p}_{n-1}^{(n)}, \ \mathfrak{p}_{n-2}^{(n)}, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_1^{(n)}, \end{matrix}$$

wird die unendliche bezw. endliche Verbindungsstrecke $\mathfrak{p}_n$, $\mathfrak{q}_n$ von allen Geraden $|\mathfrak{p}_i^{(n)}, \mathfrak{p}_k^{(n)}|$ getroffen; in beiden Fällen gehören die Punkte $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{q}_n$ zu einer und derselben Primärfläche F in dem Systeme der Verbindungsgeraden der $n-1$ Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \ \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_{n-1}.$$

Jeder Primärfläche in diesem Systeme kommt ein bis auf seinen Drehungssinn unzweideutig bestimmter Index in bezug auf die $n-1$ Grundpunkte zu.

Weil aber in einem lineal unabhängigen Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ ein Punkt allemal einer einzigen Primärfläche in dem Systeme $\mathfrak{P}_{n-1}$ der $n-1$ übrigen Punkte $\mathfrak{p}_i$ angehört, so ist hiermit die Richtigkeit des obigen Satzes dargethan.

Dritter Beweis.

Einen wesentlichen Fortschritt gegenüber den beiden vorhergehenden Methoden bezeichnet das folgende induktiv vorgehende Schlufsverfahren, welches nach Reduktion der Aufgabe auf einen ge-

wissen einfachsten Fall für diesen eine ganz mechanische Lösung liefert und dann aus einer entsprechenden Anzahl solcher die allgemeine Lösung zusammenzusetzen lehrt.

Angenommen, es sei für Punktgruppen $\mathfrak{P}_m$ von weniger als n Elementen eine Methode bekannt, um aus den gegebenen Indices von $m-1$ Elementen den des m^{ten} abzuleiten, so kann man, wenn in dem Systeme der n Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n$$

die Indices der ersten $n-1$ Punkte bekannt sind, innerhalb der drei selbständigen Punktgruppen

1) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_n,$
2) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-3}, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n,$
3) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-4}, \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n$

aus den gleichfalls bekannten respektiven Indices der Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}$$

die zugehörigen Indices des Punktes $\mathfrak{p}_n$ bis auf den Drehungssinn bestimmen:

1) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{n-3}, \ldots, \mathfrak{p}_{x_1}, \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{x_2}, \ldots,$
$(x_1, x_2 \neq n-1),$
2) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{y_1}, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_{y_2}, \ldots,$
$(y_1, y_2 \neq n-2),$
3a) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{n-4}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}, \ldots,$
3b) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-4}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}, \ldots,$
3c) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-4}, \ldots.$

Aus den Indices (1) und (2) bestimmt sich der Index des Punktes $\mathfrak{p}_n$ in dem Systeme

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}$$

a) für die Fälle

$$x_1 \neq y_1, \; x_2 \neq y_2 \quad \text{und} \quad x_1 \neq y_2, \; x_2 \neq y_1$$

eindeutig durch

$\alpha)$ $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_{x_1}, \mathfrak{p}_{n-2}, \ldots, \mathfrak{p}_{y_1}, \mathfrak{p}_{n-1}, \ldots,$
$\beta)$ $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_{x_1}, \mathfrak{p}_{n-2}, \ldots, \mathfrak{p}_{y_2}, \mathfrak{p}_{n-1}, \ldots;$

b) dagegen für die Fälle

$$x_1 = y_1, \; x_2 = y_2 \quad \text{und} \quad x_1 = y_2, \; x_2 = y_1$$

in einer der beiden Formen:

$$\alpha)\ J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{n-4}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}, \ldots,$$
$$\beta)\ J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{n-4}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_{n-2}, \ldots,$$

und erst der Index (3) läfst unter beiden die thatsächlich zutreffende konstatieren.

Wenn also für eine kleinste Zahl m bewiesen werden kann, dafs in einem Systeme aus m Punkten die Indices von $m-1$ derselben den Index des m^{ten} bis auf seinen Drehungssinn bestimmen, so gilt das Entsprechende auch für jedes System aus mehr als m Punkten.

Es zeigt aber die nähere Betrachtung eines allgemeinen Punktsystemes $\mathfrak{P}_5$, dafs der Satz für ein solches in der That gültig ist, und dafs aus den bekannten Indices von irgend 4 Punkten derjenige des 5ten abgesehen vom Drehungssinn unmittelbar abzulesen ist.

Gemäfs den drei Erscheinungsformen des Aufsenpolygones einer solchen Punktgruppe als Fünfeck, Viereck oder Dreieck gruppieren sich nämlich deren fünf Punkte:

1) entweder zu einer positiven Folge

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5;$$

2) oder zu einer analogen Folge

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4$$

mit einem in der endlichen Dreiecksfläche

$$\mathfrak{p}_1, (|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2| \times |\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4|), \mathfrak{p}_4$$

liegenden Punkte

$$\mathfrak{p}_5;$$

3) oder zu der ebenfalls positiven dritten

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5,$$

einem innerhalb des Dreiecks

$$\Delta(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5)$$

liegenden Punkte

$$\mathfrak{p}_3$$

und einem innerhalb des anderen

$$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, (|\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2| \times |\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1|)$$

fixierten Punkte

$$\mathfrak{p}_4.$$

Man kann aber die Punktgruppen des zweiten und dritten Typus mit den primären Strahlenbereichen

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

so auf eine andere Ebene central projezieren, dafs die entsprechenden Bereiche deren unendlich ferne Gerade enthalten, und die zugehörigen Primärpolygone wiederum durch die positive Punktefolge

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

dargestellt werden.

Nun wird der Index eines beliebigen Punktes in bezug auf eine Gruppe $\mathfrak{P}_n$ durch eine Centralprojektion dieser entweder gar nicht oder nur rücksichtlich des Drehungssinnes geändert. Es gilt daher der Satz:

Die Elemente eines ganz beliebigen allgemeinen Punktsystemes

$$\mathfrak{P}_5 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

lassen sich stets so und zwar auf eine einzige Weise in eine Folge bringen

$$\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{i_3}, \mathfrak{p}_{i_4}, \mathfrak{p}_{i_5},$$

dafs ihre Indices dargestellt sind durch:

$$J(\mathfrak{p}_{i_1}) = \mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{i_3}, \mathfrak{p}_{i_4}, \mathfrak{p}_{i_5}, \quad J(\mathfrak{p}_{i_2}) = \mathfrak{p}_{i_3}, \mathfrak{p}_{i_4}, \mathfrak{p}_{i_5}, \mathfrak{p}_{i_1}, \quad J(\mathfrak{p}_{i_3}) = \mathfrak{p}_{i_4}, \mathfrak{p}_{i_5}, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2},$$
$$J(\mathfrak{p}_{i_4}) = \mathfrak{p}_{i_5}, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{i_3}, \quad J(\mathfrak{p}_{i_5}) = \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{i_3}, \mathfrak{p}_{i_4}.$$

Nimmt man die Folge

$$\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{i_3}, \mathfrak{p}_{i_4}, \mathfrak{p}_{i_5} \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

und schreibt unter Bezug auf ein beliebiges Element $\mathfrak{p}_j$ die Indices der vier übrigen:

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \quad J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4,$$
$$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3,$$

so bemerkt man, dafs das Element

$$\mathfrak{p}_5$$

in genau zwei, den beiden mittleren Indices

$$J(\mathfrak{p}_2) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_3)$$

dieselben zwei Nachbarelemente hat, nämlich

$$\mathfrak{p}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_4,$$

dagegen in den beiden ersten und den beiden letzten

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_3), J(\mathfrak{p}_4)$$

resp. die anderen

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1; \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1.$$

Wenn daher von den Indices eines Punktsystemes

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_n$$

vier gegeben sind durch:

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{b_1}, \mathfrak{p}_{c_1}, \quad J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_{b_2}, \mathfrak{p}_{c_2},$$
$$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{a_3}, \mathfrak{p}_{b_3}, \mathfrak{p}_{c_3}, \quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{a_4}, \mathfrak{p}_{b_4}, \mathfrak{p}_{c_4},$$

so suche man diejenigen zwei Indices, etwa

$$J(\mathfrak{p}_2) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_3),$$

in welchen $\mathfrak{p}_n$ dieselben zwei Elemente $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_4$ zu Nachbarn hat,

$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4.$$

Wenn dann in den Indices

$$J(\mathfrak{p}_1) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_4)$$

dem Element $\mathfrak{p}_n$ respektive benachbart sind die anderen

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1,$$

so ergiebt sich

$$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4.$$

Es waren mit Bezug auf das Punktsystem

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

die Indices gegeben

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), \ldots, J(\mathfrak{p}_{n-1}).$$

Man bestimme mittels der Indices

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), J(\mathfrak{p}_3), J(\mathfrak{p}_1)$$

der Punktgruppe

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_n$$

den Index

$$J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4.$$

Eine zweite analoge Reihe

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), J(\mathfrak{p}_3), J(\mathfrak{p}_5)$$

liefert dann:

a) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3,$ b) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3,$

c) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5.$

Hierdurch ist der Index

$$J(\mathfrak{p}_n)$$

gegenüber der Gruppe

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

in den Fällen a) und b) eindeutig, im Falle c) dagegen zweideutig bestimmt:

$$\text{c)}\quad J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ (\mathfrak{p}_4,\ \mathfrak{p}_5).$$

Um die Zweideutigkeit zu heben, ist seine Bestimmung aus einem dritten Quadrupel erforderlich, etwa aus

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ J(\mathfrak{p}_4),\ J(\mathfrak{p}_5).$$

Unter der Annahme

$$J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_4,\ \mathfrak{p}_5$$

definieren die weiteren vier Indices

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_3),\ J(\mathfrak{p}_5),\ J(\mathfrak{p}_6)$$

den Index

$$J(\mathfrak{p}_n)$$

gegenüber der Gruppe

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_5,\ \mathfrak{p}_6$$

in einer der Formen:

$$\text{a)}\quad J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_6,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_5, \qquad \text{b)}\quad J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_6,\ \mathfrak{p}_5,$$

$$\text{c)}\quad J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_5,\ \mathfrak{p}_6.$$

Hierdurch bestimmt sich der Index

$$J(\mathfrak{p}_n)$$

in bezug auf die Gruppe

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_4,\ \mathfrak{p}_5,\ \mathfrak{p}_6$$

im Falle c) eindeutig,

$$J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_4,\ \mathfrak{p}_5,\ \mathfrak{p}_6,$$

in den Fällen a) und b) zweideutig,

a) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6), \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5,$ b) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, (\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6), \mathfrak{p}_5,$

und es ist deshalb noch seine Bestimmung aus respektive den Gruppen notwendig

a) $J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), J(\mathfrak{p}_3), J(\mathfrak{p}_6)$ oder b) $J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_3), J(\mathfrak{p}_4), J(\mathfrak{p}_6),$

um seine Eindeutigkeit zu erzielen.

Gesetzt, man habe

$$J(\mathfrak{p}_n)$$

durch μ_m Einzelbestimmungen aus je vier der m gegebenen Indices

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_m)$$

in bezug auf die Gruppe

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_m$$

in der Form erhalten:

$$J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_m.$$

Um ihn dann durch eine möglichst kleine Zahl weiterer Einzelbestimmungen rücksichtlich des Systemes zu gewinnen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m+1},$$

wähle man die Gruppe

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_{m_1+1}), J(\mathfrak{p}_{2m_1+1}), J(\mathfrak{p}_{m+1}),$$

$$m_1 = \left[\frac{m}{3}\right].$$

Dieselbe liefert eine der Formen:

a) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m_1+1}, \mathfrak{p}_{2m_1+1},$

b) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{m_1+1}, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{2m_1+1},$

c) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{m_1+1}, \mathfrak{p}_{2m_1+1}, \mathfrak{p}_{m+1}.$

Den ersten Fall vorausgesetzt — die beiden anderen sind analog zu behandeln — fasse man die Gruppe auf:

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_{m_2+1}), J(\mathfrak{p}_{2m_2+1}), J(\mathfrak{p}_{m+1}),$$

$$m_2 = \left[\frac{m_1}{3}\right],$$

und bestimme den Index $J(\mathfrak{p}_n)$ in einer der Formen:

a) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m_2+1}, \mathfrak{p}_{2m_2+1},$

b) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{m_2+1}, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{2m_2+1},$

c) $J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{m_2+1}, \mathfrak{p}_{2m_2+1}, \mathfrak{p}_{m+1}.$

Indem man dieses Verfahren entsprechend den absteigenden Werten

$$m_1 = \left[\frac{m}{3}\right],\ m - 2\left[\frac{m}{3}\right];\quad m_2 = \left[\frac{m_1}{3}\right],\ m_1 - 2\left[\frac{m_1}{3}\right];$$

$$m_3 = \left[\frac{m_2}{3}\right],\ m_2 - 2\left[\frac{m_2}{3}\right];\ \ldots$$

bis zur Eingrenzung von $\mathfrak{p}_{m+1}$ durch zwei im Index $J(\mathfrak{p}_n)$ benachbarte Elemente fortsetzt, gelangt man nach höchstens μ_m Einzelbestimmungen

$$3^{\mu_m - 1} \leqq m < 3^{\mu_m}$$

zu dem gesuchten Index

$$J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{m+1}'.$$

Die Gesamtzahl der zur vollständigen Feststellung des Index $J(\mathfrak{p}_n)$ erforderlichen Spezialbestimmungen stellt sich hiernach auf höchstens

$$\varphi(n) = \sum_{m=4}^{n-1} \mu_m.$$

Für die Fälle

$$n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$$

findet man resp.

$$\varphi(n) = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 14,\ 14,\ \cdots.$$

Zur näheren Erläuterung des Theoremes (5) diene die durch ein System von vier lineal unabhängigen Punkten bedingte Einteilung der Ebene. Man denke sich unter der hinlänglich allgemeinen Annahme einer positiven Punktefolge

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_4$$

die Verbindungsgeraden der sechs Punktepaare $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$ gezogen. Dieselben werden die Ebene in eine Anzahl einander ausschliefsender Flächen einteilen, und zwar werden um einen Punkt $\mathfrak{p}_i$ je sechs und an den Schnittpunkten

$$(|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2|, |\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4|) = \mathfrak{q}, \quad (|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4|, |\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3|) = \mathfrak{r}$$

zwei weitere liegen. Da von ersteren die an eine endliche Strecke $\overline{\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k}$ grenzenden Teilflächen doppelt, nämlich für jeden der beiden Endpunkte einmal gezählt werden, und da je vier Flächen einer Ecke $\mathfrak{p}_i$ dem genügen, so berechnet sich die Gesamtzahl der Teilflächen auf

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 = 18.$$

Zur besseren Orientierung bezeichne man

1) die den vier endlichen Strecken

$$\overline{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2},\ \overline{\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3},\ \overline{\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1},\ \overline{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1}$$

links- und rechtsseitig anliegenden Flächen durch resp.

$$'F_{1,2},\ 'F_{2,3},\ 'F_{3,4},\ 'F_{4,1},$$
$$F'_{1,2},\ F'_{2,3},\ F'_{3,4},\ F'_{4,1};$$

2) die den Verlängerungen der Diagonalen

$$\overline{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4}$$

an deren $2 \cdot 2$ Endpunkten

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4$$

entsprechend angrenzenden Flächen durch resp.

$$'F_1, F'_1;\ 'F_3, F'_3 \quad \text{und} \quad 'F_2, F'_2;\ 'F_4, F'_4;$$

3) die in den beiden Ecken

$$\mathfrak{q} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}$$

zu den Dreiecken

$$F'_{4,1},\ F'_{3,4}$$

gehörigen Scheitelflächen aber durch

$$F_\mathfrak{q} \quad \text{und} \quad F_\mathfrak{r}.$$

Indem man einen veränderlichen fünften Punkt der Reihe nach in jede der so bestimmten 18 Primärflächen verlegt, findet man für letztere die Indexsysteme:

Indices der Fläche $'F_{1,2}$:

$$\left.\begin{array}{l} {}'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \quad {}'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \\ {}'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \quad {}'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \end{array}\right\} \quad {}'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2;$$

Indices der Fläche $'F_{2,3}$:

$$\left.\begin{array}{l} {}'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \quad {}'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \\ {}'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \quad {}'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \end{array}\right\} \quad {}'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4;$$

Indices der Fläche $'F_{3,4}$:

$$\left.\begin{array}{l} {}'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \quad {}'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \\ {}'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \quad {}'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \end{array}\right\} \quad {}'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3;$$

Indices der Fläche $'F_{4,1}$:

$$\left.\begin{array}{l} {}'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \quad {}'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \\ {}'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \quad {}'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \end{array}\right\} \quad {}'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;$$

Indices der Flächen $F'_{1,2}$ und F_r:

$$\left.\begin{array}{l} {}'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \quad {}'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \\ {}'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \quad {}'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{a) } {}'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \quad \text{b) } {}'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2; \end{array}$$

Indices der Flächen $F'_{2,3}$ und F_q:

$$\left.\begin{array}{l} {}'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \quad {}'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \\ {}'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \quad {}'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{a) } {}'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \quad \text{b) } {}'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2; \end{array}$$

Indices zu $F'_{3,4}$:

$$\left.\begin{array}{l} {}'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \quad {}'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \\ {}'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \quad {}'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \end{array}\right\} \quad {}'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;$$

Indices zu $F'_{4,1}$:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \quad 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1,$$
$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5,$$
$$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;$$

Indices zu $'F_1$ und $'F_3$:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \quad 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5,$$
$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5,$$
$$\text{a) } 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \quad \text{b) } 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4;$$

Indices zu F_1' und F_3':

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \quad 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5,$$
$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5,$$
$$\text{a) } 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \quad \text{b) } 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3;$$

Indices zu $'F_2$ und $'F_4$:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \quad 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1,$$
$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3,$$
$$\text{a) } 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \quad \text{b) } 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3;$$

Indices zu F_2' und F_4':

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \quad 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1,$$
$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3,$$
$$\text{a) } 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \quad \text{b) } 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3.$$

Der Vergleich der 18 Flächen F rücksichtlich ihrer Indices $'J(\mathfrak{p}_5)$ ergiebt folgende Gruppierungen:

1) $'F_{1,2}, \quad F_1', \quad 'F_2;$ $\qquad$ $'F_{3,4}, \quad F_3', \quad 'F_4;$
$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2;$ $\quad 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3;$

2) $'F_{4,1}, \quad 'F_1, \quad F_4';$ $\qquad$ $'F_{2,3}, \quad F_2', \quad 'F_3;$
$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;$ $\quad 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4;$

3) $F'_{1,2}, \quad F'_{2,3}, \quad F'_{3,4}, \quad F'_{4,1};$ $\qquad$ $F_q, \quad F_r;$
$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;$ $\quad 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2.$

Es schliefsen sich aber von den 6 Flächen einer Reihe $2 \cdot 2$ zu je einer Primärfläche zusammen:

1) F_1' und F_3', $'F_2$ und $'F_4$,
2) $'F_1$ und $'F_3$, F_2' und F_4',
3) $F_{1,2}'$ und $F_{\mathfrak{r}}$, $F_{2,3}'$ und $F_{\mathfrak{q}}$.

Das Geradensystem des Punktquadrupels $\mathfrak{P}_4$ bestimmt daher drei gesonderte Systeme von je vier, zwei einfachen und zwei zusammengesetzten Primärflächen, nämlich:

1) $'F_{1,2}$; F_1', F_3'; $'F_2$, $'F_4$; $'F_{3,4}$,
2) $'F_{2,3}$; $'F_3$, $'F_1$; F_2', F_4'; $'F_{4,1}$,
3) $F_{4,1}'$; $F_{1,2}'$, $F_{\mathfrak{r}}$; $F_{2,3}'$, $F_{\mathfrak{q}}$; $F_{3,4}'$,

so dafs die den Flächen einer Reihe zukommenden 4 Indices

$$J(\mathfrak{p}_5)$$

bis auf den Drehungssinn gleich sind.

Die geometrische Zusammengehörigkeit*) von vier solchen Flächen läfst sich dahin formulieren, dafs sie ein sogenanntes vollständiges Scheitelflächensystem konstituieren.

Denn fafst man in einem beliebigen ebenen Geradensysteme

$$g_1, g_2, \ldots, g_m$$

zwei Primärflächen mit einer gemeinsamen Ecke

$$(g_i, {}'g_k)$$

allemal dann als Scheitelflächen auf, wenn beide in den Geraden

$$g_i \text{ und } g_k$$

auch je zwei Seiten besitzen, mögen durch den Schnittpunkt nur diese zwei oder noch andere Geraden g_h gehen, so erkennt man, dafs von den vier Primärdreiseiten einer der obigen drei Reihen ein jedes in seinen drei Ecken — zwei eigentlichen Punkten $\mathfrak{p}_i$ und einem Diagonalpunkt — die drei anderen zu Scheitelflächen hat.

Die zwölf Primärflächen des Quadrupels $\mathfrak{P}_4$ bilden somit drei getrennte vollständige Systeme von Scheitelflächen, charakterisiert durch ebensoviele Indices

$$J(\mathfrak{p}_5),$$

welche aus einem von ihnen durch die cyklischen Vertauschungen dreier aufeinanderfolgender Elemente hervorgehen.

Die Eigenschaft des Quadrupels $\mathfrak{P}_4$, dafs je 4 seiner Primär-

---

*) Vergl. Tafel I. Die Flächen desselben Systemes sind durch gleiche Schraffierung gekennzeichnet.

flächen gleiche oder entgegengesetzte Indices $J(\mathfrak{p}_5)$ besitzen, führt auf die allgemeinere Frage:

In welcher gegenseitigen Lagenbeziehung stehen in einem Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

zwei getrennte Primärflächen

$$F(\mathfrak{q}) \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{r}),$$

deren Indices entweder gleich oder entgegengesetzt sind:

$$1) \quad {}'J(\mathfrak{q}) = {}'J(\mathfrak{r}), \qquad 2) \quad J'(\mathfrak{q}) = {}'J(\mathfrak{r})?$$

Die Frage zu entscheiden, beachte man, dafs ein beweglicher, die Strecke

$$\mathfrak{q} \text{ —— } \mathfrak{r}$$

durchlaufender Punkt $\mathfrak{x}$ successive bestimmte λ Geraden

$$|\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{k_1}|, \quad |\mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{k_2}|, \ldots, |\mathfrak{p}_{i_\lambda}, \mathfrak{p}_{k_\lambda}|,$$

und zwar jede genau einmal passieren wird,

$$0 \gtreqless \lambda \leqq \frac{1}{2} n (n-1).$$

Es existiert daher zwischen den Indices

$${}'J(\mathfrak{q}) \quad \text{und} \quad {}'J(\mathfrak{r})$$

eine Verbindung

$${}'J(\mathfrak{q}), {}'J(\mathfrak{x}_1), {}'J(\mathfrak{x}_2), \ldots, {}'J(\mathfrak{x}_{\lambda-1}), {}'J(\mathfrak{r}),$$

in der je zwei benachbarte Indices sich lediglich durch den Stellenwechsel zweier benachbarten Elemente unterscheiden.

Indem man die Folge der λ verschiedenen Transpositionen

$$\frac{i_1}{k_1}, \frac{i_2}{k_2}, \ldots, \frac{i_\lambda}{k_\lambda}$$

als eine eigentliche oder als eine Substitution schlechthin bezeichnet, bietet sich zunächst die Aufgabe:

Alle Substitutionen aufzufinden, welche eine gegebene Elementenreihe

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

in eine der beiden anderen überführen

$$1) \quad 1, 2, 3, \ldots, n, \qquad 2) \quad n, n-1, n-2, \ldots, 1,$$

gleichläufige cyklische Permutationen der ursprünglichen und jeder resultierenden Reihe als identisch aufgefafst.

Angenommen erstens, die Substitution

$$\frac{i_1}{k_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{i_2}{k_2}, \quad \ldots, \quad \frac{i_\lambda}{k_\lambda}$$

transformiere die Reihe

$$1, 2, \ldots, n$$

in sich selbst, d. h. es gelte

$$\frac{i_1}{k_1}, \quad \ldots, \quad \frac{i_\lambda}{k_\lambda}: \; 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots, n,$$

so mufs bei Ausführung der Operationen

$$\frac{i_2}{k_2}, \quad \frac{i_3}{k_3}, \quad \ldots, \quad \frac{i_\lambda}{k_\lambda}: \; 2, 1, 3, 4, \ldots, n$$

jedes Element der Reihe

$$3, 4, \ldots, n$$

mit mindestens einem und folglich auch nur mit einem des Paares

$$1, 2$$

zur Transposition gelangen. Anderenfalls würde entweder entgegen dem Endresultate immer nur eine Reihe resultieren

$$1, \ldots, x, \ldots, 2, \ldots,$$

oder entgegen der Voraussetzung dieselbe Transposition

$$\frac{1}{x} \quad \text{resp.} \quad \frac{2}{x}$$

zweimal auftreten.

Enthält also die Substitution die Transpositionen

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{m},$$

so umfafst sie notwendig auch die anderen

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{2}{m+1}, \quad \frac{2}{m+2}, \quad \ldots, \quad \frac{2}{n}$$

und jede genau einmal.

Da aber in der Substitution

$$\frac{i_1}{k_1}, \quad \frac{i_2}{k_2}, \quad \ldots, \quad \frac{i_\lambda}{k_\lambda}$$

die Elementewechsel

$$\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{2}{1}$$

vor irgend zwei anderen

$$\frac{1}{i} \quad \text{und} \quad \frac{2}{k}$$

garnichts voraushaben, enthält erstere nach dem vorherigen Schlusse auch die Transpositionen

$$\frac{i}{1}, \quad \frac{i}{m+1}, \quad \frac{i}{m+2}, \quad \ldots, \quad \frac{i}{n}$$

und

$$\frac{k}{2}, \quad \frac{k}{3}, \quad \frac{k}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{k}{m},$$

und es folgt der Satz:

Durch jede eine gegebene Elementenreihe

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

reproduzierende Substitution

$$\frac{i_1}{k_1}, \quad \frac{i_2}{k_2}, \quad \ldots, \quad \frac{i_\lambda}{k_\lambda}$$

werden die n Elemente derart in 2 Gruppen geschieden

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \quad \text{und} \quad b_1, b_2, \ldots, b_{n-m},$$

dafs die $m(n-m)$ paarweisen Kombinationen

$$a_i, \quad b_k$$

alle λ Transpositionen bestimmen.

Es gilt aber auch die Umkehrung:

Jedes System von $m(n-m)$ Transpositionen

$$\frac{a_i}{b_k}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, n-m$$

entsprechend der Zerlegung einer gegebenen Elementenreihe

$$1, 2, \ldots, n$$

in zwei beliebige Gruppen

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \quad \text{und} \quad b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}$$

definiert eine die Reihe reproduzierende Substitution.

Zum Beweise verfüge man über die an sich willkürlichen Bezeichnungen der Elemente beider Gruppen derart, dafs die gegebene Reihe

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

sich in der Form darstellt:

$$a_1, b_1, b_2, \ldots, b_{\beta_1}, a_2, b_{\beta_1+1}, \ldots, b_{\beta_2}, a_3, b_{\beta_2+1}, \ldots.$$

Alsdann verwandeln die successiven Transpositionen

$$\frac{a_m}{b_{\beta_{m-1}} + h_m}, \quad \frac{a_{m-1}}{b_{\beta_{m-2}} + h_{m-1}}, \quad \ldots, \quad \frac{a_2}{b_{\beta_1} + h_2}, \quad \frac{a_1}{b_{h_1}},$$

$$(h_i = 1, 2, \ldots, n - m - \beta_i)$$

die Reihe in die andere

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-m},$$

und darauf die weiteren Transpositionen

$$\frac{a_m}{b_{k_m}}, \quad \frac{a_{m-1}}{b_{k_{m-1}}}, \quad \ldots, \quad \frac{a_2}{b_{k_2}}, \quad \frac{a_1}{b_{k_1}},$$

$$(k_i = 1, 2, 3, \ldots, \beta_{i-1})$$

diese wieder in jene. Die Gesamtzahl der eine gegebene Reihe von n Elementen in sich selbst transformierenden Substitutionen — die identische mitgerechnet — bestimmt sich nach alledem durch:

$$2^{(n-1)}.$$

Gesetzt jetzt zweitens, die Substitution

$$\frac{i_1}{k_1}, \quad \frac{i_2}{k_2}, \quad \ldots, \quad \frac{i_\lambda}{k_\lambda}$$

transformiere die Reihe

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

in die entgegengesetzte

$$n, n-1, n-2, \ldots, 1,$$

so ist allgemein ersichtlich, dafs die Koexistenx zweier Transpositionen

$$\frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \frac{a}{c}$$

das gleichzeitige Auftreten der dritten bedingt

$$\frac{b}{c},$$

da ohne letztere die in der ursprünglichen Reihe

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

vorhandene Folge

$$\ldots, a, \ldots, b, \ldots, c, \ldots$$

bei der einmaligen Anwendung von

$$\frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \frac{a}{c}$$

in eine ihr cyklisch identische übergeht.

Enthält deshalb die gegebene Substitution die Transpositionen eines Elementes

$$a_1$$

mit den $m - 1$ anderen

$$a_2, a_3, \ldots, a_m,$$

so umfafst sie die Vertauschungen aller Elementepaare dieser Gruppe.

Weil ferner immer nur benachbarte Elemente transponiert werden, müssen diese m Elemente in der ursprünglichen Reihe

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

zu einer ununterbrochenen Folge vereinigt sein,

$$a_1', a_2', \ldots, a_m',$$

und diese Anordnung geht durch die partielle Substitution

$$\frac{a_i'}{a_k''}$$

$$(k - i = 1, 2, \ldots, m - 1)$$

in die entgegengesetzte über.

Angenommen, es sei die Folge

$$a_1', a_2', a_3', \ldots, a_m'$$

identisch mit

$$1, 2, 3, \ldots, m,$$

dann geht die ursprüngliche Reihe mit Ausführung der partiellen Substitution $\frac{a_i''}{a_k'}$ über in die andere:

$$m, m-1, \ldots, 2, 1, m+1, m+2, \ldots, n.$$

Nun soll der zweite Teil der gegebenen Substitution aus dieser die andere Reihe erzeugen:

$$m, m-1, \ldots, 2, 1, n, n-1, \ldots, m+1.$$

Bei dem Ausschlufs aller Transpositionen

$$(0 \leqq i \leqq m-1) \qquad \frac{m-i}{m+k} \qquad (1 \leqq k \leqq n-m)$$

ist also die unumgängliche Transposition der Elemente

$$m+1 \quad \text{und} \quad n$$

nur dadurch zu ermöglichen, dafs beide zusammen successive mit allen Zwischenelementen

$$m+2, m+3, \ldots, n-1,$$

und zwar mit jedem je einmal die Stellen wechseln.

Die Substitution besitzt daher notwendig noch die zweite Transpositionsgruppe

$$\frac{m+i}{m+k'}$$

$$k - i = 1, 2, \ldots, n - m - 1.$$

Also resultiert der Satz:
Teilt man eine gegebene Reihe

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

auf alle möglichen Weisen in je zwei Gruppen aufeinanderfolgender Elemente:

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \quad \text{und} \quad b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}$$

und unterwirft sie in jeder Zerlegung successive den Transpositionen

$$\frac{a_i}{a_{i+h_i}} \qquad \text{und} \qquad \frac{b_k}{b_{k+h_k}}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m-1, \quad k = 1, 2, \ldots, n-m-1,$$
$$h_i = 1, 2, \ldots, m-i, \quad h_k = 1, 2, \ldots, n-m-k,$$

so stellen die resultierenden den verschiedenen Zerlegungen entsprechenden Transpositionsgruppen alle diejenigen Substitutionen dar, welche die gegebene Reihe in die entgegengesetzte transformieren.

Ihre Anzahl berechnet sich durch

$$1 + \frac{1}{2} n (n-1).$$

Gemäfs den gewonnenen zwei Sätzen nimmt die geometrische Frage, welche den ersten Anlafs zu ihrer Ableitung gegeben, folgende präzisere Fassung an:

Existiert unter Annahme einer ganz beliebigen Substitution

$$1) \ \frac{a}{b} \qquad \text{oder} \qquad 2) \ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

$$\left(\begin{matrix} a = 1, 2, \ldots, m \\ b = m+1, m+2, \ldots, n \end{matrix}\right), \quad \left(\begin{matrix} a, b = 1, 2, \ldots, m \\ c, d = m+1, m+2, \ldots, n \end{matrix}\right)$$

stets ein allgemeines Punktsystem

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

mit zwei Primärflächen

$$F(\mathfrak{q}) \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{r}),$$

sodafs ein beweglicher Punkt auf dem stetigen endlichen Übergange

$$\mathfrak{q} \qquad \mathfrak{r}$$

genau die Geraden passiert:

$$1) \ |\mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_b| \qquad \text{oder} \qquad 2) \ |\mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_b| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_c, \mathfrak{p}_d|?$$

Angenommen, die Frage sei allgemein zu bejahen, so wird in dem jeweiligen Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ das Punktepaar

$$\mathfrak{q}, \mathfrak{r}$$

gegenüber den beiden isolierten Partialsystemen

$$\mathfrak{P}_m \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_{n-m} \equiv \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m+2}, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

je ein und derselben Primärfläche angehören, und zwar im ersten Falle innerhalb eines einzigen, im Endlichen zusammenhängenden Bereiches, im zweiten Falle innerhalb zweier im Unendlichen sich vereinigender Gebietsteile. Für ein Punktsystem erster Art ergiebt sich hiernach folgende Konstruktion: Man wähle in einem ganz beliebigen Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_m \equiv \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$$

irgend eine Primärfläche

$$F(\mathfrak{q}, \mathfrak{r})$$

und in dieser so die Punkte

$$\mathfrak{q} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r},$$

dafs deren Verbindungsgerade durch keinen Punkt von $\mathfrak{P}_m$ geht. In dem dadurch entstehenden Punktsysteme $\mathfrak{P}_{m+2}$ bestimmen die beiden Primärwinkel

$$\mathfrak{q}|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{r}| \text{ und } \mathfrak{r}|\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_2| \quad \text{resp.} \quad \mathfrak{q}|\mathfrak{r}, \mathfrak{p}_3| \text{ und } \mathfrak{r}|\mathfrak{p}_4, \mathfrak{q}|$$

innerhalb der Primärfläche

$$F(\mathfrak{q}, \mathfrak{r})$$

durch ihren gemeinsamen Deckungsbereich eine dreiseitige Fläche

$$\Delta_{1,2}(\mathfrak{x}) \quad \text{resp.} \quad \Delta_{3,4}(\mathfrak{y})$$

von der Beschaffenheit, dafs alle Verbindungsgeraden

$$|\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_i|, \quad |\mathfrak{y}, \mathfrak{a}_i|, \quad |\mathfrak{x}, \mathfrak{y}|$$

die Strecke schneiden

$$\mathfrak{q}, \mathfrak{r}.$$

Infolgedessen fixiere man in einer, etwa der ersten der beiden Flächen

$$\Delta_{1,2}(\mathfrak{x}) \quad \text{und} \quad \Delta_{3,4}(\mathfrak{y})$$

so successive die Punkte

$$\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_{n-m},$$

dafs in jedem selbständigen Punktsysteme

$$\mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_h$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n-m-1)$$

die zu den Strahlenbüscheln

$$S(\mathfrak{q}) \quad \text{und} \quad S(\mathfrak{r})$$

gehörigen Primärwinkel

$$\mathfrak{q}\,|\,\mathfrak{b}_{h_1},\ \mathfrak{r}\,|,\quad \mathfrak{q}\,|\,\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{b}_{h_2}|\quad \text{und}\quad \mathfrak{r}\,|\,\mathfrak{q},\ \mathfrak{b}_{h_3}|,\quad \mathfrak{r}\,|\,\mathfrak{b}_{h_4},\ \mathfrak{p}_2|$$

in respektive den Deckungsbereichen von

$$\mathfrak{q}\,|\,\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{b}_{h_2}|\ \text{mit}\ \mathfrak{r}\,|\,\mathfrak{q},\ \mathfrak{b}_{h_3}|\quad \text{und}\quad \mathfrak{q}\,|\,\mathfrak{b}_{h_1},\ \mathfrak{r}|\ \text{mit}\ \mathfrak{r}\,|\,\mathfrak{b}_{h_4},\ \mathfrak{p}_2|$$

den nächstfolgenden Punkt $\mathfrak{b}_{h+1}$ enthalten.

Gemäfs dieser Anordnung schneiden die Geraden

$$|\,\mathfrak{b}_{h+1},\ \mathfrak{b}_{h-i}\,|$$

die unendliche Strecke

$$\mathfrak{q} \text{ —— } \infty \text{ —— } \mathfrak{r},$$

und es genügt daher das endgültige System $\mathfrak{P}_n$ den gestellten Anforderungen.

Behufs Darstellung eines Punktsystemes zweiter Art

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{a}_m,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{b}_{n-m}$$

mit zwei Primärflächen

$$F(\mathfrak{q}) \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{r})$$

entgegengesetzter Indices

$$J'(\mathfrak{q}) = {}'J(\mathfrak{r}),$$

in welchem alle Geraden

$$|\,\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{a}_k\,| \quad \text{und} \quad |\,\mathfrak{b}_i,\ \mathfrak{b}_k\,|$$

die endliche Strecke schneiden

$$\mathfrak{q} \text{ —— } \mathfrak{r},$$

alle übrigen Geraden

$$|\,\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b}_k\,|$$

aber die unendliche Strecke

$$\mathfrak{q} \text{ —— } \infty \text{ —— } \mathfrak{r},$$

konstruiere man zunächst ein Punktsystem erster Art

$$\mathfrak{P}_n' \equiv \mathfrak{a}_1',\ \mathfrak{a}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{a}_m',\ \mathfrak{b}_1',\ \mathfrak{b}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{b}_{n-m}'$$

mit zwei Primärflächen

$$F(\mathfrak{q}') \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{r}')$$

gleicher Indices

$$J'(\mathfrak{q}') = J'(\mathfrak{r}'),$$

ziehe eine die Strecke $\mathfrak{q}' \text{ —— } \mathfrak{r}'$ schneidende Gerade g und projeziere das System aus einem aufserhalb seiner Ebene gewählten Augenpunkte $\mathfrak{o}$ auf eine zu der Verbindungsebene $[\mathfrak{o}, g]$ parallele andere E'. Dann genügt die Projektion in letzterer den gestellten Bedingungen.

Die abgeleiteten Resultate gelten uneingeschränkt auch für singuläre Punktsysteme. Man kann nämlich ganz allgemein ein lineal abhängiges Punktsystem mit einem entsprechenden Flächenpaar

$$F(\mathfrak{q}) \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{r})$$

durch stetige genügend kleine Bewegungen der Elemente stets so in ein lineal unabhängiges überführen, dafs während des Überganges keine einzige Gerade $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$ einen der beiden festen Punkte $\mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ passiert.

Es bleibt noch zum vollständigen Abschlufs der Untersuchung die Frage zu beantworten, wie vielen verschiedenen Primärflächen $F(\mathfrak{x})$ eines Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ ein und derselbe bis auf den Drehungssinn bestimmte Index $J(\mathfrak{x})$ zugehören kann.

Angenommen, es stehe mit Bezug darauf fest, dafs in einem Punktsysteme $\mathfrak{P}_{n-1}$ höchstens $n-1$ Primärflächen

$$F(\mathfrak{q}_1), \; F(\mathfrak{q}_2), \; \ldots, \; F(\mathfrak{q}_{n-1})$$

den gleichen Index besitzen:

$$J(\mathfrak{q}_1) = J(\mathfrak{q}_2) = \cdots = J(\mathfrak{q}_{n-1}).$$

Wenn daher in einem Systeme $\mathfrak{P}_n$ für gewisse n Primärflächen

$$F(\mathfrak{q}_1), \; F(\mathfrak{q}_2), \; \ldots, \; F(\mathfrak{q}_n)$$

die Indices gelten

$$J(\mathfrak{q}_1) = J(\mathfrak{q}_2) = \cdots = J(\mathfrak{q}_n),$$

und es scheidet aus dem Systeme ein Punkt, etwa $\mathfrak{p}_n$, aus, so müssen von den n resultierenden Flächen

$$F(\mathfrak{q}_1), \; F(\mathfrak{q}_2), \; \ldots, \; F(\mathfrak{q}_n)$$

bei noch immer gleichen Indices

$$J(\mathfrak{q}_i) = J(\mathfrak{q}_k)$$

nach der Voraussetzung zwei identisch sein, etwa

$$\overline{F}(\mathfrak{q}_{n-1}) \quad \text{und} \quad \overline{F}(\mathfrak{q}_n).$$

Infolgedessen wird die Strecke

$$\mathfrak{q}_{n-1} \text{ ——— } \mathfrak{q}_n$$

von keiner Geraden

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2|, \; \ldots, \; |\mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}|$$

des Systemes

$$\mathfrak{P}_{n-1},$$

zufolge der Verschiedenheit der Flächen

$$F(\mathfrak{q}_{n-1}) \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{q}_n)$$

in dem ursprünglichen Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n$$

dagegen von den $n - 1$ Geraden getroffen

$$\mathfrak{p}_n | : \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}.$$

Es scheiteln sich mithin die Flächen

$$F(\mathfrak{q}_{n-1}) \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{q}_n)$$

in ihrer gemeinsamen Grenzecke

$$\mathfrak{p}_n.$$

Indem man aus dem Systeme $\mathfrak{P}_n$ successive alle n Punkte $\mathfrak{p}_i$ ausscheidet und in jedem Falle die analoge Schlufsweise anwendet, erkennt man, dafs die n Primärflächen

$$F(\mathfrak{q}_1), F(\mathfrak{q}_2), \ldots, F(\mathfrak{q}_n)$$

entsprechend den n Punkten

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

genau n Paare von Scheitelflächen bestimmen.

Weil aber jede Primärfläche in einer Ecke immer nur eine primäre Scheitelfläche besitzt, ordnen sich die n Flächenpaare allemal zu einer Reihe

I) $$F(\mathfrak{q}_1), F(\mathfrak{q}_2), \ldots, F(\mathfrak{q}_n), F(\mathfrak{q}_1),$$

sodafs je zwei benachbarte Flächen

$$F(\mathfrak{q}_i) \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{q}_{i+1})$$

sich in dem Punkte $\mathfrak{p}_i$ scheiteln.

Existierte nun in dem Systeme $\mathfrak{P}_n$ aufser $F(\mathfrak{q}_n)$ noch eine zweite von den $n - 1$ Flächen

$$F(\mathfrak{q}_1), \ldots, F(\mathfrak{q}_{n-1})$$

verschiedene Primärfläche

$$F(\mathfrak{q}_{n+1})$$

mit dem Index

$$J(\mathfrak{q}_{n+1}) = J(\mathfrak{q}_1),$$

so bilden diese n Flächen nach der vorigen Schlufsweise eine I) ganz analoge Reihe

II) $$F(\mathfrak{q}_1), F(\mathfrak{q}_2), \ldots, F(\mathfrak{q}_{n-1}), F(\mathfrak{q}_{n+1}), F(\mathfrak{q}_1),$$

und da hierin

$$F(\mathfrak{q}_{n-1}) \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{q}_{n+1})$$

in der gemeinsamen Ecke

$$\mathfrak{p}_n$$

primäre Scheitelflächen sind, folgt:

$$F(\mathfrak{q}_{n+1}) \equiv F(\mathfrak{q}_n).$$

Enthält also ein Punktsystem $\mathfrak{P}_{n-1}$ höchstens $n-1$ Primärflächen von gleichen Indices, so kann ein System $\mathfrak{P}_n$ höchstens n solche Flächen zählen.

Es gehören aber in dem oben diskutierten Punktquadrupel

$$\mathfrak{P}_4 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$$

zu einem beliebigen Index

$$J(\mathfrak{p}_n)$$

genau vier getrennte Primärflächen; mithin gilt der Satz:

Theorem 5: In einem allgemeinen Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

können höchstens n Primärflächen in ihren Indices übereinstimmen, und ordnen sich dann dieselben allemal zu einer cyklischen Folge

$$F(\mathfrak{q}_1), F(\mathfrak{q}_2), \ldots, F(\mathfrak{q}_n), F(\mathfrak{q}_1),$$

in welcher je zwei benachbarte Individuen

$$F(\mathfrak{q}_i) \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{q}_{i+1})$$

ein zu ihrer gemeinsamen Grenzecke

$$\mathfrak{p}_i$$

gehöriges Paar von Scheitelflächen darstellen.

Dieser Zusammenhang wird nicht gestört, wenn bei entsprechenden stetigen Bewegungen des Punktsystemes Elemente desselben in abhängige Lage gelangen. Der Satz gilt daher auch für singuläre Systeme.

Nach den Ausführungen auf pag. 52 und 53 kann man ein allgemeines Punktsystem $\mathfrak{P}_5$ stets so auf eine zweite Ebene central projezieren, dafs seinen Elementen in der Projektion die Ecken eines einfachen konvexen Fünfecks entsprechen. Konstruiert man das letzterem zugehörige Geradensystem

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$$

und unterscheidet bei positiver Eckenfolge

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

die den Strecken

$$\overline{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2}, \overline{\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3}, \overline{\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4}, \overline{\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5}, \overline{\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1}$$

rechts- und linksseitig anliegenden Primärflächen respektive durch

1) $F'_{1,2}$, $F'_{2,3}$, $F'_{3,4}$, $F'_{1,5}$, $F'_{5,1}$,
2) $'F_{1,2}$, $'F_{2,3}$, $'F_{3,4}$, $'F_{4,5}$, $'F_{5,1}$,

so bildet die erste Flächenfolge das einzige cyklische System von fünf aufeinanderfolgenden Scheitelflächen mit übereinstimmenden Indices. — Die Flächen der zweiten Reihe nämlich enthalten zwar auch je zwei Grenzecken

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1,$$

stehen jedoch nicht in dem gegenseitigen Zusammenhange von Scheitelflächen.

Hieraus ergiebt sich für ein allgemeines Punktsystem $\mathfrak{P}_n$ mit n Primärflächen desselben Index folgende allgemeine Konstruktion:

Man nehme zunächst mit Bezug auf das Fünfeck $\mathfrak{P}_5$ innerhalb der Fläche $F'_{5,1}$ den Punkt $\mathfrak{p}_6$, darauf mit Bezug auf $\mathfrak{P}_6$ in $F'_{6,1}$ den Punkt $\mathfrak{p}_7$, dann mit Bezug auf $\mathfrak{P}_7$ in $F'_{7,1}$ den Punkt $\mathfrak{p}_8$, u. s. w., schliefslich mit Bezug auf $\mathfrak{P}_{n-1}$ in $F'_{n-1,1}$ den Punkt $\mathfrak{p}_n$ an. —

Jedes anderswie bestimmte Punktsystem $\mathfrak{P}_n$ des vorausgesetzten Charakters kann immer in ein derartiges System projeziert werden.

Um ganz allgemein festzustellen, ob und auf welche Weise in dem Indexsysteme einer Punktgruppe

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

die Koexistenz von m verschiedenen Primärflächen

$$F'(\mathfrak{q}_1), F'(\mathfrak{q}_2), \ldots, F'(\mathfrak{q}_m)$$

gleicher Indices

$$J(\mathfrak{q}_1) = J(\mathfrak{q}_2) = \cdots = J(\mathfrak{q}_m)$$

von vorneherein zum Ausdruck kommt, dient folgende Überlegung:

Es kann die Ausscheidung des Punktes $\mathfrak{p}_n$ aus dem Systeme $\mathfrak{P}_n$

1) entweder die Vereinigung eines beziehungsweise mehrerer Flächenpaare

$$F(\mathfrak{q}_i) \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{q}_k)$$

zu je einer einzigen Primärfläche des restierenden Punktsystemes $\mathfrak{P}_{n-1}$ zur Folge haben,

2) oder jedes solche Flächenpaar getrennt lassen.

In dem ersten Falle begegnen einer bezüglichen Verbindungsstrecke

$$\mathfrak{q}_i \overset{\cdot}{\text{---}} \mathfrak{q}_k$$

die $n - 1$ Geraden

$$|\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1|, \quad |\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_2|, \ldots. \quad |\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{n-1}|,$$

dagegen keine der Geraden

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2|, \quad |\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3|, \quad \ldots, \quad |\mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}|.$$

Die beiden Primärflächen

$$F(\mathfrak{q}_i) \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{q}_k)$$

scheiteln sich daher in

$$\mathfrak{p}_n$$

und stellen deshalb das einzige durch die Ausscheidung dieses Punktes sich vereinigende Flächenpaar dar.

Da ganz analoge Verhältnisse auch jedem anderen Punkt $\mathfrak{p}_i$ gegenüber in Betracht kommen, können bei der successiven Elimination von m derselben nur zwei Fälle eintreten:

1) entweder ordnen sich letztere an und für sich in einer gewissen Folge zu einem einfachen (primären) m-Eck

$$\mathfrak{p}_1', \quad \mathfrak{p}_2', \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_m',$$

dessen m zugehörige Flächen

$$F_{1,2}', \quad F_{2,3}', \quad \ldots, \quad F_{m,1}'$$

respektive die anderen enthalten

$$F(\mathfrak{q}_1), \quad F(\mathfrak{q}_2), \quad \ldots, \quad F(\mathfrak{q}_m),$$

2) oder es bleiben bei dem Wegfall mindestens eines von ihnen die Flächen

$$F(\mathfrak{q}_1), \quad F(\mathfrak{q}_2), \quad \ldots, \quad F(\mathfrak{q}_m)$$

Bestandteile ebensovieler getrennter Primärflächen

$$F'(\mathfrak{q}_1), \quad F'(\mathfrak{q}_2), \quad \ldots, \quad F'(\mathfrak{q}_m)$$

des restierenden Punktsystemes.

Die Behandlung der in dem zweiten Falle hervortretenden Punktgruppe $\mathfrak{P}_{n-1}'$ nach den gleichen Regeln führt

1) entweder zu einem Polygone

$$\mathfrak{p}_1'', \quad \mathfrak{p}_2'', \quad \ldots, \quad \mathfrak{p}_m'',$$

2) oder zu einem Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_{n-2}''$$

mit m getrennten Primärflächen

$$F''(\mathfrak{q}_1), \quad F''(\mathfrak{q}_2), \quad \ldots, \quad F''(\mathfrak{q}_m).$$

Bei ganz analoger Analyse dieses letzten und jedes neu resultierenden Punktsystemes wird man im ungünstigsten Falle nach $n - m$ Wiederholungen zu einem Systeme geführt

$$\mathfrak{p}_1^{(h)},\ \mathfrak{p}_2^{(h)},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_m^{(h)},$$

in welchem die Punkte

$$\mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_m$$

getrennten Primärflächen angehören.

Man hat somit Theorem 5 wie folgt zu ergänzen:

5a. Wenn in einem Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ m getrennte Primärflächen $F(\mathfrak{q}_i)$ gleiche Indices $J(\mathfrak{q}_i)$ besitzen, so gelten mit Bezug auf mindestens eine Untergruppe

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_m$$

die Relationen

$$J(\mathfrak{p}_1) = J(\mathfrak{p}_2) = \cdots = J(\mathfrak{p}_m).$$

§ 6. Die Grundgesetze des Indexsystemes.

Eine nähere Kritik der in dem ersten und dritten Beweise des Theoremes 4 enthaltenen allgemeinen Bestimmungsmethoden eines unbekannten Index aus dem gegebenen Systeme der übrigen zeigt, dafs dieselben gegenüber konkreten Aufgaben einen sehr geringen Grad von Leistungsfähigkeit besitzen.

Das eine Verfahren verlangt zunächst die Ermittelung der Charakteristiken aller derjenigen Punktetripel der Untergruppe

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-1},$$

in welchen zwei Elemente im Index des dritten benachbart sind, und bedingt dann weiter die Bestimmung von $n - 2$ Primärvielecken.

Die andere Methode besteht in der erstmaligen an sich schon komplizierten Darstellung der Aufgabe als Endglied einer Kette analoger Probleme und der darauf erfolgenden successiven Auflösung aller dieser.

Beide Ableitungsweisen entsprechen daher nicht dem Bedürfnisse, und es entsteht notwendig die Frage nach einer solchen, welche, aus der eigentlichen Quelle des Satzes geschöpft, direkt zum Ziele führt.

Ein einfaches Bespiel läfst erkennen, dafs der Charakter des Indexsystemes durch die Bedingung der eindeutigen Abhängigkeit eines beliebigen von den übrigen Indices nicht vollwertig ausgedrückt wird.

Gegeben sei nämlich ein allgemeines Punktsystem

$$\mathfrak{P}_6 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6,$$

gebildet aus der positiven Eckenfolge

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$$

und den in resp. den endlichen Dreiecksflächen

$$\triangle(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{q}) \quad \text{und} \quad \triangle(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{q})$$
$$\left(\mathfrak{q} \equiv (|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3| \cdot |\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4|)\right)$$

liegenden Punkten

$$\mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_6.$$

In demselben werden durch die vier Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1), \quad 'J(\mathfrak{p}_2), \quad 'J(\mathfrak{p}_3), \quad 'J(\mathfrak{p}_4)$$

die beiden anderen

$$J(\mathfrak{p}_5) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_6)$$

dem Theoreme 4 zufolge zwar nur in bezug auf die vier Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_4,$$

thatsächlich aber in Rücksicht auf das volle System $\mathfrak{P}_6$ eindeutig bestimmt.

Um die den Schematismus des Indexsystemes in allen seinen Bestandteilen beherrschenden und regulierenden Grundgesetze festzustellen, dienen gewisse Grundthatsachen der Anschauung, welche die Stammform des ebenen Punktsystemes, das allgemeine Punkttripel unvermittelt darbietet.

Man denke sich zunächst eine positive Punktefolge

$$\mathfrak{p}_x, \quad \mathfrak{p}_y, \quad \mathfrak{p}_z$$

und bezeichne eine cyklische Permutation derselben allgemein durch

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l.$$

Es seien ferner die Flächen, welche ein um den Punkt

$$\mathfrak{p}_i$$

in positivem Sinne gedrehter Strahl beim Übergange aus den Punkten

$$\mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_l$$

nach resp.

$$\mathfrak{p}_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k$$

überstreicht, dargestellt durch die respektiven Symbole

$$\mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k| \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|.$$

Alsdann liefert die Anschauung die Beziehung:

1) $\mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k| + \mathfrak{p}_k|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l| = \mathfrak{p}_l|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k| + 2\triangle(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l).$

Falls nun das vorliegende Tripel ein Bestandteil des Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ darstellt, kann man unter den eingeführten Symbolen die Gruppen der Systempunkte innerhalb der durch sie ursprünglich bezeichneten Flächen verstehen, ohne dadurch die Gültigkeit der aufgestellten Beziehung irgendwie zu beschränken.

Schreibt man daher letztere in der Form

$$2)\quad \mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k| - \triangle(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l) + \mathfrak{p}_k|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l| - \triangle(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_l|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$$

und berücksichtigt, dafs die beiden Punktgruppen

$$\mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k| - \triangle \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l| - \triangle$$

kein Element gemein haben, erwägt endlich noch, dafs bei geeigneten perspektiven Projektionen eines Punktsystemes in andere von den Indices der Elemente eines Tripels entweder nur einer oder beliebige zwei oder alle drei den Drehungssinn wechseln, so wird man die Bedeutung der Fundamentalgleichung (1) für den Organismus des Indexsystemes durch den Doppelsatz aussprechen:

Theorem 6: Wenn von den Indices der Elemente eines allgemeinen Tripels

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

zwei die Formen haben

$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_1}, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_2}',$$
$$J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_{\beta_1}, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_2', \ldots, \mathfrak{r}_{\beta_2}',$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2)$$

und die Reihen

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_2}'$$

mit resp. den Reihen

$$\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_{\beta_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_2', \ldots, \mathfrak{r}_{\beta_2}'$$

die gemeinsamen Gruppen besitzen

$$\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_{\gamma_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots, \mathfrak{t}_{\delta_1},$$

dagegen die Reihen

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_2}'$$

mit resp. den Reihen

$$\mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_2', \ldots, \mathfrak{r}_{\beta_2}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_{\beta_1}$$

die Gruppen

$$\mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2', \ldots, \mathfrak{f}_{\gamma_2}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{t}_1', \mathfrak{t}_2', \ldots, \mathfrak{t}_{\delta_2}',$$

so bestimmt sich der dritte Index notwendig durch:

*) $J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, [\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_{\gamma_1}, \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots, \mathfrak{t}_{\delta_1}], \mathfrak{p}_l, [\mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2', \ldots, \mathfrak{f}_{\gamma_2}', \mathfrak{t}_1', \mathfrak{t}_2', \ldots, \mathfrak{t}_{\delta_2}']$;

und umgekehrt:

Ist der Index eines der drei Elemente gegeben durch

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha], \mathfrak{p}_l, [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\beta],$$

so stellen sich diejenigen der beiden anderen allemal in den Formen dar

$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_1}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_{\beta_1}], \mathfrak{p}_l, [\mathfrak{q}_{\alpha_1+1}, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{r}_{\beta_1+1}, \ldots, \mathfrak{r}_\beta],$$
$$J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_1}, \mathfrak{r}_{\beta_1+1}, \ldots, \mathfrak{r}_\beta], \mathfrak{p}_k, [\mathfrak{q}_{\alpha_1+1}, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_{\beta_1}].$$

Als wichtigster Spezialfall folgt hieraus:

Theorem 6a: Wenn unter den Indices der n Elemente des Systemes $\mathfrak{P}_n$ zwei der Form vorhanden

$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\beta,$$
$$J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha, \mathfrak{p}_k, \bar{\mathfrak{r}}_1, \bar{\mathfrak{r}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{r}}_\beta,$$

in welchen die beiden Reihen

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha$$

und folglich auch die anderen

$$\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\beta \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{r}}_1, \bar{\mathfrak{r}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{r}}_\beta$$

sich nur durch die Anordnungen ihrer Elemente unterscheiden, so sind die Punkte

$$\mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}$$

in dem Index des Punktes

$$\mathfrak{p}_i$$

allemal benachbart:

$$J(\mathfrak{p}_i) = \ldots, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \ldots;$$

und umgekehrt:

Sind in einem gegebenen Punktsysteme

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_i, \ldots, \mathfrak{p}_k, \ldots, \mathfrak{p}_l, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

zwei Punkte

$$\mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_l$$

Nachbarn im Index eines dritten

$$\mathfrak{p}_i,$$
$$J(\mathfrak{p}_i) = \ldots, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \ldots,$$

*) Es stellen die in eckige Klammern eingeschlossenen Reihen eine bestimmte Aufeinanderfolge ihrer Elemente dar.

so haben deren Indices allemal die Formen:

$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\beta,$$
$$J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha, \mathfrak{p}_k, \bar{\mathfrak{r}}_1, \bar{\mathfrak{r}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{r}}_\beta,$$

wo die Reihen

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha$$

und folglich auch die anderen

$$\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\beta \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{r}}_1, \bar{\mathfrak{r}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{r}}_\beta$$

genau die nämlichen Elemente umfassen.

Endlich schliefst man:

Theorem 6b: Bestehen in einem Indexsysteme zwei Indices der Form

$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \ldots \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \ldots,$$

so gilt allemal auch der dritte

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \ldots.$$

Es sollen die in dem Theoreme (6) formulierten Gesetze fortan als die Grundgesetze des Indexsystemes bezeichnet und jedes ihnen genügende Schema

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), \ldots, J(\mathfrak{p}_n)$$

ohne Rücksicht darauf, ob es durch ein Punktsystem realisierbar ist oder nicht, als charakterisiertes oder als Indexsystem in erweitertem Sinne aufgefafst werden.

Die volle Bedeutung dieser Gesetze wird erst in der weiteren Entwickelung der Theorie der Punktsysteme zu Tage treten. Zunächst bieten sie ein aufserordentlich einfaches Mittel, um aus einer Anzahl ihren Formen nach gegebener Indices die übrigen je nach dem speziellen Charakter des Systemes ein- oder mehrdeutig zu bestimmen.

Als ein erstes Beispiel diene der obige Fall eines allgemeinen Punktsystemes $\mathfrak{P}_6$ mit den vier gegebenen Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \quad 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5,$$
$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3.$$

Hier ergiebt der successive Vergleich des Index

$$'J(\mathfrak{p}_1)$$

mit den drei anderen

$$'J(\mathfrak{p}_2), \quad 'J(\mathfrak{p}_3), \quad 'J(\mathfrak{p}_4)$$

für die Indices

$$J(\mathfrak{p}_5) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_6)$$

resp. die Formen:

$$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, (\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, (\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4$$

und

$$J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, (\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4), \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5 = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5,$$

wo die Klammern wieder die Unbestimmtheit der eingeschlossenen Elementefolgen ausdrücken.

Ein allgemeineres Beispiel bietet die Ableitung des n^{ten} aus gegebenen $n-1$ Indices. Hierzu schreibe man letztere gemäfs dem Schema:

$$\begin{aligned}
J(\mathfrak{p}_1) &= \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}', \\
J(\mathfrak{p}_2) &= \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_2}'', \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{\alpha_2+1}'', \ldots, \mathfrak{p}_{n-3}'', \\
J(\mathfrak{p}_3) &= \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1^{(3)}, \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_3}^{(3)}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{\alpha_3+1}^{(3)}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-3}^{(3)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\
J(\mathfrak{p}_{n-1}) &= \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1^{(n-1)}, \mathfrak{p}_2^{(n-1)}, \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_{n-1}}^{(n-1)}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{\alpha_{n-1}+1}^{(n-1)}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-3}^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Wenn dann der successive Vergleich des Index

$$J(\mathfrak{p}_1)$$

mit den anderen

$$J(\mathfrak{p}_2), J(\mathfrak{p}_3), \ldots, J(\mathfrak{p}_m)$$

den gesuchten n^{ten} Index in der Form ergiebt:

$$\begin{gathered}
J(\mathfrak{p}_n) = \bar{\mathfrak{p}}_1, (\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{q}_{a_1}'), \bar{\mathfrak{p}}_2, (\mathfrak{q}_1'', \mathfrak{q}_2'', \ldots, \mathfrak{q}_{a_2}''), \\
\bar{\mathfrak{p}}_3, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_m, (\mathfrak{q}_1^{(m)}, \mathfrak{q}_2^{(m)}, \ldots, \mathfrak{q}_{a_m}^{(m)}),
\end{gathered}$$

wo die Reihen

$$\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$$

sich nur durch die Anordnung ihrer Elemente unterscheiden, so bestimmt der weitere Vergleich der beiden Indices

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_{h-1}', \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{h+1}', \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}'$$

und

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_2^{(m+1)}, \mathfrak{p}_3^{(m+1)}, \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_{m+1}-1}^{(m+1)}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{\alpha_{m+1}+1}^{(m+1)}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}^{(m+1)}$$

den Index

$$\begin{gathered}
J(\mathfrak{p}_n) = \bar{\mathfrak{p}}_1, (\mathfrak{q}_1^{(0)}, \mathfrak{q}_2^{(0)}, \ldots, \mathfrak{q}_{a_0}^{(0)}), \mathfrak{p}_{m+1}, (\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_{a_1}'), \bar{\mathfrak{p}}_2, (\mathfrak{q}_1'', \mathfrak{q}_2'', \ldots, \mathfrak{q}_{a_2}''), \\
\bar{\mathfrak{p}}_3, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_m, \left(\mathfrak{q}_1^{(m)}, \mathfrak{q}_2^{(m)}, \ldots, \mathfrak{q}_{a_m}^{(m)}\right).
\end{gathered}$$

Im ungünstigsten Falle wird daher eine $(n-2)$-malige Anwendung des Theoremes (6) den gesuchten Index ergeben, während im günstigsten Falle schon eine $\left[\frac{n-1}{2}\right]$-malige Wiederholung der Schlufsweise ausreichen kann.

Zu neuen bemerkenswerten Folgerungen führt die Verallgemeine-

rung der am Schlusse des vorigen Paragraphen behandelten Fragen. Das dort gegebene Theorem (5) kann auch so formuliert werden:

Kennt man in bezug auf ein Punktsystem

$$\mathfrak{P}_{n-1} = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$$

die $n-1$ Indices

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), \ldots, J(\mathfrak{p}_{n-1})$$

und einen n^{ten} Index

$$J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1},$$

so ist dadurch das Indexsystem der vollständigen Punktgruppe

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

in dem einzigen Falle n-deutig bestimmt, wo jeder der $n-1$ Indices

$$J(\mathfrak{p}_1), \ldots, J(\mathfrak{p}_{n-1})$$

mit dem Index

$$J(\mathfrak{p}_n)$$

rücksichtlich der jedesmal übrigen $n-2$ Elemente übereinstimmt.

Diesem Satze steht gewissermafsen reciprok der andere gegenüber:

Theorem 7: Wenn das Indexsystem einer Punktgruppe

$$\mathfrak{P}_{n-1} \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$$

gegeben ist durch

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), \ldots, J(\mathfrak{p}_{n-1}),$$

und es stimmt der gleichfalls bekannte Index

$$J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$$

eines n^{ten} Punktes

$$\mathfrak{p}_n$$

mit keinem jener Indices überein, so ist das Indexsystem der vollständigen Gruppe

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

vollkommen und unzweideutig definiert.

Die Erkenntnis dieser Wahrheit erfordert den vorherigen Beweis des folgenden Hülfsatzes:

Die durchgängige Verschiedenheit des Index

$$J(\mathfrak{p}_n)$$

von allen anderen

$$J(\mathfrak{p}_h)$$

rücksichtlich der jeweiligen Gruppen

$$\mathfrak{P}_{n-2}^{(h)} \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{h-1}, \mathfrak{p}_{h+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$$

bedingt allemal das analoge Verhalten des Index

$$J(\mathfrak{p}_n)$$

gegenüber mindestens einem Systeme

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_{n-2})$$

von nur $n-2$ Indices.

In der That führt die gegenteilige Annahme auf einen Widerspruch. — Zunächst lassen sich gemäfs dem gegebenen Index

$$J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-1}$$

die Grundbedingungen

$$J(\mathfrak{p}_n) \neq J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_{n-1})$$

auch so ausdrücken:

$$\begin{aligned} J(\mathfrak{p}_1) &\neq \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_4,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-1},\\ J(\mathfrak{p}_2) &\neq \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_4,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ J(\mathfrak{p}_{n-1}) &\neq \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-2}. \end{aligned}$$

Die Voraussetzung nun, dafs in jeder Gruppe von $n-2$ Elementen

$$\overset{h}{\mathfrak{P}}_{n-2} \equiv \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{h-1},\ \mathfrak{p}_{h+1},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-1}$$

mindestens ein Index der Beziehung genügt

$$J(\mathfrak{p}_a) = J(\mathfrak{p}_i),$$

involviert für zwei verschiedene Gruppen

$$\overset{i}{\mathfrak{P}}_{n-2} \quad \text{und} \quad \overset{k}{\mathfrak{P}}_{n-2}$$

respektive die Indices:

$$J(\mathfrak{p}_a) = \cdots,\ \mathfrak{p}_{a-2},\ \mathfrak{p}_{a-1},\ \mathfrak{p}_{a+1},\ \mathfrak{p}_{a+2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{i-2},\ \mathfrak{p}_{i-1},\ \mathfrak{p}_{i+1},\ \mathfrak{p}_{i+2},\ \ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_b) = \cdots,\ \mathfrak{p}_{b-2},\ \mathfrak{p}_{b-1},\ \mathfrak{p}_{b+1},\ \mathfrak{p}_{b+2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{k-2},\ \mathfrak{p}_{k-1},\ \mathfrak{p}_{k+1},\ \mathfrak{p}_{k+2},\ \ldots,$$

und zwar gilt allemal

$$a \neq b.$$

Anderenfalls würde nämlich der Index bestehen:

$$J(\mathfrak{p}_a) = \cdots,\ \mathfrak{p}_{a-1},\ \mathfrak{p}_{a+1},\ \cdots,\ \mathfrak{p}_{i-1},\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_{i+1},\ \cdots,\ \mathfrak{p}_{k-1},\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_{k+1},\ \cdots.$$

In weiterer Konsequenz geht daher der Index

$$J(\mathfrak{p}_n)$$

durch die successiven Ausscheidungen der Elemente

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \cdots\ \mathfrak{p}_{n-1}$$

in einer gewissen Reihenfolge

$$\mathfrak{p}_a,\ \mathfrak{p}_b,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_r$$

respektive in die anderen über

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_{n-1}),$$

so dafs das System gilt:

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_{a-1}, \mathfrak{p}_{a+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{b-1}, \mathfrak{p}_b, \mathfrak{p}_{b+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1},$$
$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_{a-1}, \mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_{a+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{b-1}, \mathfrak{p}_{b+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_{n-1}) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}, \mathfrak{p}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}.$$

Vergleicht man hierin die Indices

$$J(\mathfrak{p}_1) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_2)$$

mit den beiden anderen

$$J(\mathfrak{p}_a) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_b),$$

so bieten sich für letztere die unterschiedlichen Bildungen:

1) $$J(\mathfrak{p}_a) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1},$$
$$J(\mathfrak{p}_b) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{k-1}, \mathfrak{p}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1};$$

2) $$J(\mathfrak{p}_a) = \begin{matrix}\mathfrak{p}_1\\ \mathfrak{p}_2\end{matrix}, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1},$$
$$J(\mathfrak{p}_b) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{k-1}, \mathfrak{p}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1};$$

3) $$J(\mathfrak{p}_a) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1},$$
$$J(\mathfrak{p}_b) = \begin{matrix}\mathfrak{p}_1\\ \mathfrak{p}_2\end{matrix}, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_{k-1}, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1};$$

4) $$J(\mathfrak{p}_a) = \begin{matrix}\mathfrak{p}_1\\ \mathfrak{p}_2\end{matrix}, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1},$$
$$J(\mathfrak{p}_b) = \begin{matrix}\mathfrak{p}_2\\ \mathfrak{p}_1\end{matrix}, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_{k-1}, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}.$$

Entsprechend den ersten drei Fällen bestimmen die Indices

1) $J(\mathfrak{p}_a)$ und $J(\mathfrak{p}_2)$ resp. $J(\mathfrak{p}_b)$ und $J(\mathfrak{p}_1)$ —
2) $J(\mathfrak{p}_b)$ und $J(\mathfrak{p}_1)$ —
3) $J(\mathfrak{p}_a)$ und $J(\mathfrak{p}_2)$ —

nach Theorem (6b) unzweideutig die dritten:

1, 3) $$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_{a-1}, \mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_{a+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1},$$
1, 2) $$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_{b-1}, \mathfrak{p}_b, \mathfrak{p}_{b+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1},$$

und diese stehen mit den obigen Grundbedingungen im Widerspruch.

Aus analogen Gründen bedingen im vierten Falle die Indices

$$J(\mathfrak{p}_a) = \begin{matrix}\mathfrak{p}_1\\ \mathfrak{p}_2\end{matrix}, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1} \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_b) = \begin{matrix}\mathfrak{p}_2\\ \mathfrak{p}_1\end{matrix}, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$$

zusammen mit dem dritten

$$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_{c-1}, \mathfrak{p}_{c+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$$
$$(c \neq a, b)$$

die Indices

$$J(\mathfrak{p}_1) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_2)$$

wiederum in den durch die Voraussetzung ausgeschlossenen Formen:

$$J(\mathfrak{p}_1) = J(\mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_2) = J(\mathfrak{p}_n).$$

Wenn aber, wie hiermit bewiesen, in bezug auf ein Punktsystem

$$\mathfrak{P}_{n-2} \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}$$

die Beziehungen gelten

$$J(\mathfrak{p}_n) \neq J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), \ldots, J(\mathfrak{p}_{n-2}),$$

so bestehen nach dem nämlichen Schlufsverfahren für mindestens ein Untersystem

$$\mathfrak{P}_{n-3} \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-3}$$

die entsprechenden Ungleichungen

$$J(\mathfrak{p}_n) \neq J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), \ldots, J(\mathfrak{p}_{n-3}).$$

In weiterer Konsequenz mufs man daher schliefslich zu einem Untersysteme gelangen

$$\mathfrak{P}_m \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m,$$

für welches selbst noch alle m Bedingungen gelten

$$J(\mathfrak{p}_n) \neq J(\mathfrak{p}_1), \; J(\mathfrak{p}_2), \ldots, J(\mathfrak{p}_m),$$

während für jede beliebige in ihm enthaltene Gruppe von nur $m-1$ Elementen dies nicht mehr der Fall ist. Weil ferner nach Früherem in einem Systeme

$$\mathfrak{P}_5 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_n$$

allgemein die Beziehung statt hat

$$J(\mathfrak{p}_n) = J(\mathfrak{p}_h),$$

ergiebt sich zugleich die Zahl 5 als der kleinste für m in Betracht kommende Wert.

Angenommen jetzt, es stehe mit Bezug auf das Theorem (7) fest, dafs durch die Indices

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), \ldots, J(\mathfrak{p}_{n-2})$$

eines Punktsystemes

$$\mathfrak{P}_{n-2}$$

und durch einen weiteren von jenen verschiedenen Index

$$J(\mathfrak{p}_{n-1}) \quad \text{oder} \quad J(\mathfrak{p}_n)$$

das Indexsystem der Gruppe

$$\mathfrak{P}_{n-2},\ \mathfrak{p}_{n-1} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{P}_{n-2},\ \mathfrak{p}_n$$

unzweideutig definiert ist. — Alsdann bieten sich für das noch unbekannte Indexsystem

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_{n-2})$$

der vollen Gruppe

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n$$

a priori folgende Darstellungen:

I.
$$\begin{aligned}
J(\mathfrak{p}_1) &= (\mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n),\ \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-3}',\\
J(\mathfrak{p}_2) &= (\mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n),\ \mathfrak{p}_1'',\ \mathfrak{p}_2'',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-3}'',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
J(\mathfrak{p}_{n-2}) &= (\mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n),\ \mathfrak{p}_1^{(n-2)},\ \mathfrak{p}_2^{(n-2)},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-3}^{(n-2)};
\end{aligned}$$

II.
$$\begin{aligned}
J(\mathfrak{p}_1) &= (\mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n),\ \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-3}',\\
J(\mathfrak{p}_2) &= (\mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n),\ \mathfrak{p}_1'',\ \mathfrak{p}_2'',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-3}'',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
J(\mathfrak{p}_m) &= (\mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n),\ \mathfrak{p}_1^{(m)},\ \mathfrak{p}_2^{(m)},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-3}^{(m)},\\
J(\mathfrak{p}_{m+1}) &= \mathfrak{p}_{n-1},\ \mathfrak{p}_1^{(m+1)},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-3}^{(m+1)},\\
J(\mathfrak{p}_{m+2}) &= \mathfrak{p}_{n-1},\ \mathfrak{p}_1^{(m+2)},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-3}^{(m+2)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
J(\mathfrak{p}_{n-2}) &= \mathfrak{p}_{n-1},\ \mathfrak{p}_1^{(n-2)},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-3}^{(n-2)};
\end{aligned}$$

III.
$$\begin{aligned}
J(\mathfrak{p}_1) &= \mathfrak{p}_{n-1},\ \mathfrak{p}_1',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-3}',\\
J(\mathfrak{p}_2) &= \mathfrak{p}_{n-1},\ \mathfrak{p}_1'',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-3}'',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
J(\mathfrak{p}_{n-2}) &= \mathfrak{p}_{n-1},\ \mathfrak{p}_1^{(n-2)},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{n-3}^{(n-2)}.
\end{aligned}$$

Aus dem ersten Schema bestimmen sich die Indices

$$J(\mathfrak{p}_{n-1}) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_n)$$

in bezug auf die Punktgruppe $\mathfrak{P}_{n-2}$ nach Theorem (4) in ein und derselben Form:

$$J(\mathfrak{p}_{n-1}) = J(\mathfrak{p}_n);$$

das Schema verstöfst in seinen Konsequenzen gegen die Voraussetzungen des Satzes, ist mithin illusorisch.

In der zweiten Darstellung bedingen die Indices

$$J(\mathfrak{p}_1) = (\mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n), \mathfrak{p}_1', \ \ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_2) = (\mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n), \mathfrak{p}_1'', \ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_m) = (\mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n), \mathfrak{p}_1^{(m)}, \ \ldots$$

successive kombiniert mit dem Index

$$J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \mathfrak{p}_m, \ \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$$

nach Theorem (6) den Index $J(\mathfrak{p}_{n-1})$ in der Form:

$$J(\mathfrak{p}_{n-1}) = \mathfrak{p}_1, \ \ldots, \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \mathfrak{p}_3, \ \ldots, \mathfrak{p}_m, \ \ldots, \mathfrak{p}_n.$$

Nunmehr aber definieren die hinsichtlich des Punktsystemes

$$\mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m+2}, \ \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_h$$

vollständig bekannten Indices

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}), J(\mathfrak{p}_{m+2}), \ \ldots, J(\mathfrak{p}_{n-2}), J(\mathfrak{p}_{n-1}), J(\mathfrak{p}_n)$$

nach Theorem (4) unzweideutig den Index

$$J(\mathfrak{p}_h) = (\mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n), \mathfrak{p}_1^{(h)}, \mathfrak{p}_2^{(h)}, \ \ldots, \mathfrak{p}_{n-3}^{(h)}$$
$$(h = 1, 2, \ \ldots, m)$$

und folglich auch die Stellung seiner Elemente

$$\mathfrak{p}_{n-1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_n.$$

Der Annahme II, wenn sie überhaupt möglich, entspricht folglich ein einziges Indexsystem.

Das Schema III endlich schliefst von vorneherein jede Mehrdeutigkeit aus.

Definieren also die in bezug auf das Punktsystem

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}$$

bekannten Indices

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), \ \ldots, J(\mathfrak{p}_{n-2})$$

zusammen mit dem gleichfalls gegebenen, von ihnen aber verschiedenen Index

$$J(\mathfrak{p}_n)$$

unzweideutig das Indexsystem der Gruppe

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_n,$$

so bestimmen die ursprünglich vorliegenden Indices

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), \ \ldots, J(\mathfrak{p}_{n-1})$$

der Punktgruppe

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$$

zusammen mit dem von ihnen verschiedenen n-ten Index

$$J(\mathfrak{p}_n)$$

ihrerseits unzweideutig das Indexsystem der Gruppe

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n.$$

Nach § 5 kann man das Indexsystem einer allgemeinen Punktgruppe

$$\mathfrak{P}_5 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

stets in der Form annehmen:

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \quad J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \quad J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5,$$
$$J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \quad J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4.$$

Wie eine einfache Überlegung zeigt, existiert nur ein einziger von allen diesen verschiedener Index

$$J(\mathfrak{p}_6),$$

und zwar ergiebt sich derselbe in der Darstellung:

$$J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4.$$

Demgemäfs bieten sich nach Theorem (6) gegenüber dem vollen Systeme

$$\mathfrak{P}_6 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$$

zunächst für die Indices

$$J(\mathfrak{p}_1) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_3)$$

von vorneherein die Möglichkeiten:

a) $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \quad J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5,$

b) $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \quad J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5,$

c) $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \quad J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5,$

d) $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \quad J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5,$

e) $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \quad J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5.$

In den Fällen a, b, e bedingen die Indices

$$J(\mathfrak{p}_1) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_6)$$

den anderen

$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, (\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5),$$

in d aber die Indices

$$J(\mathfrak{p}_3) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_6)$$

den dritten

$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4).$$

In allen vier Fällen gelangt man also zu Folgerungen, welche der Voraussetzung widersprechen.

Nur in dem Falle c findet man im Einklange mit den Thatsachen:

$$J(\mathfrak{p}_4) = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6), \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, (\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6), \mathfrak{p}_4.$$

Die Kombinationen der Indices

$$J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4$$

mit dem Index

$$J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4$$

ergeben aber entgegen der Voraussetzung respektive die anderen:

$$J(\mathfrak{p}_5) = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3), \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_4) = (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3), \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6.$$

Mithin kommen einzig und allein die Annahmen in Frage:

$$J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4.$$

Weil aber das hiermit formal abgeleitete Indexsystem

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \; 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \; 'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2,$$
$$'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \; 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \; 'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4$$

thatsächlich realisierbar ist durch ein Punktsystem

$$\mathfrak{P}_6 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6,$$

gebildet aus der positiven Punktefolge

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

und einem innerhalb der von den fünf Geraden

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3|, \quad |\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5|, \quad |\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2|, \quad |\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4|, \quad |\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1|$$

eingeschlossenen Primärfläche beliebig fixierten Punkte

$$\mathfrak{p}_6,$$

so ist durch die Indices des Punktsystemes $\mathfrak{P}_5$ und den von ihnen verschiedenen Index $J(\mathfrak{p}_6)$ dasjenige der Punktgruppe $\mathfrak{P}_6$, und in weiterer Folge auch das gesuchte der vollständigen Punktgruppe $\mathfrak{P}_n$ vollkommen und unzweideutig definiert. Q. e. d.

An die Theoreme (5) und (7) knüpft sich naturgemäfs die Frage: Wie vieldeutig bestimmt sich das Indexsystem einer Punktgruppe

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n,$$

wenn $n - 1$ Indices

$$J(\mathfrak{p}_1), \; J(\mathfrak{p}_2), \; \ldots, \; J(\mathfrak{p}_{n-1})$$

und ein mit m derselben übereinstimmender Index

$$J(\mathfrak{p}_n)$$

gegeben sind in bezug auf die Untergruppe

$$\mathfrak{P}_{n-1} \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}?$$

Die hier vorgemerkten Beziehungen zwischen den gegebenen n Indices sind an und für sich nicht zureichend, um aus ihnen die Vieldeutigkeit des gesuchten Index- und Punktsystemes abzuleiten. Es ist letztere vielmehr erst durch den engeren Charakter des jeweiligen Schematismus bedingt. Allgemein läfst sich nur aussagen:

Wenn die m Elemente

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$$

in jedem der $n - m - 1$ Indices

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}), J(\mathfrak{p}_{m+2}), \ldots, J(\mathfrak{p}_{n-1})$$

gleichviele (λ) auseinanderliegende, an sich ununterbrochene Folgen bilden,

$$J(\mathfrak{p}_{m+h}) = \cdots; [(\mathfrak{p}_1^{(h)}, \mathfrak{p}_2^{(h)}, \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_1}^{(h)})], \ldots, [(\mathfrak{p}_{\alpha_1+1}^{(h)}, \mathfrak{p}_{\alpha_1+2}^{(h)}, \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_2}^{(h)})], \ldots$$
$$\ldots, \left[(\mathfrak{p}_{\alpha_{\lambda-1}+1}^{(h)}, \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_\lambda}^{(h)})\right], \ldots,$$
$$(1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\lambda = m)$$

und wenn bei gleicher Verteilung auf die λ Gruppen

$$\mathfrak{p}_{\alpha_i+1}^{(h)}, \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_i+1}^{(h)} \equiv \mathfrak{P}^{(i)}$$

nur die Anordnung dieser und der Elemente in ihnen verschieden ist für verschiedene Indices

$$J(\mathfrak{p}_{m+h_1}) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_{m+h_2}),$$

so wird dadurch das Indexsystem der Punktgruppe

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

und folglich diese selbst mindestens $m + \lambda$-deutig bestimmt.

Es ergiebt sich die Richtigkeit des Satzes aus zwei Gründen. — Einerseits ordnen sich die m Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$$

zufolge der Beziehungen

$$J(\mathfrak{p}_n) = J(\mathfrak{p}_1) = J(\mathfrak{p}_2) = \cdots = J(\mathfrak{p}_m)$$

nach Theorem (5) in einer gewissen Reihenfolge, etwa der vorstehenden, zu einem einfachen projektiv konvexen m-Eck, so dafs dadurch der Punkt

$$\mathfrak{p}_n$$

seiner Lage nach an die m Flächen gebunden ist:

I. $F'_{1,2}, F'_{2,3}, \ldots, F'_{m,1}$.

Andrerseits gehören die λ Punktgruppen

$$\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \ldots, \mathfrak{P}^{(\lambda)}$$

gemäfs den engeren Voraussetzungen über die $n - m - 1$ Indices

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}), J(\mathfrak{p}_{m+2}), \ldots, J(\mathfrak{p}_{n-1})$$

gegenüber dem selbständigen Systeme

$$\mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m+2}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$$

zu ebensovielen Primärflächen

$$\text{II.} \quad \overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_\lambda.$$

Weil dann aber jede Fläche

$$F'_{\alpha_h, \alpha_h+1}$$

mit den beiden anderen

$$\overline{F}_h \quad \text{und} \quad \overline{F}_{h+1}$$

je ein Gebiet gemein hat, besteht der gesamte Deckungsbereich der Flächenreihen

$$\text{I} \quad \text{und} \quad \text{II}$$

aus mindestens $m + \lambda$ getrennten Bezirken, innerhalb deren die Lage des Punktes $\mathfrak{p}_n$ willkürlich bleibt.

Um die wahre Vieldeutigkeit des gesuchten Indexsystemes zu erkennen, erinnere man sich, dafs nach dem Zusatze zu Theorem (5) gewisse λ von den $n - m - 1$ Punkten

$$\mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m+2}, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1},$$

etwa die Punkte

$$\mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m+2}, \ldots, \mathfrak{p}_{m+\lambda},$$

in einer Folge

$$\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_\lambda$$

sich gleichfalls zu den Ecken eines einfachen projektiv konvexen Polygones ordnen, dessen respektive Flächen

$$\overline{F}'_{1,2}, F'_{2,3}, \ldots, F'_{\lambda,1}$$

die Primärflächen einschliefsen

$$F_1, F_2, \ldots, F_\lambda.$$

Die fragliche Vieldeutigkeit wird daher durch die Anzahl derjenigen Primärflächen des Systemes $\mathfrak{P}_n$ bedingt, in welche die $m + \lambda$ Deckungsbereiche der Flächenreihen

$$\text{I} \quad \text{und} \quad \text{II}$$

durch die Verbindungsgeraden der Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_m$$

mit den anderen

$$\bar{\mathfrak{p}}_{\lambda+1}, \mathfrak{p}_{\lambda+2}, \cdots, \mathfrak{p}_{n-1}$$

zerschnitten werden.

---

§ 7. Fundamentaltripel und Fundamentalreihen.

Unter allen primären Punktgruppen eines Systemes $\mathfrak{P}_n$ sind diejenigen mit je drei Elementen, die sogenannten Fundamentaltripel, für die genetische Auffassung des gesamten Punktsystemes von grundlegender Bedeutung.

Schon die in § 4 entwickelte Relation

$$x_3 - x_5 - 2x_6 - 3x_7 - \cdots = 4 + 2A$$

beweist für jedes ebene Punktsystem die Existenz von mindestens vier Fundamentaltripeln.

Und in der That gehören dem einfachsten Typus dieser Gebilde, dem Systeme dreier lineal unabhängigen Punkte

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l,$$

genau vier primäre Strahlenbereiche zu:

$$\mathfrak{p}_\infty \,|\, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l; \quad \mathfrak{p}_i \,|\, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l; \quad \mathfrak{p}_k \,|\, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l; \quad \mathfrak{p}_l \,|\, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k.$$

In den höheren Punktsystemen dagegen ist bei gleicher Anzahl n aber verschiedener Lage der Elemente die Anzahl der Fundamentaltripel variabel und nur ihre Minimalzahl von n allein abhängig, nämlich gemäfs dem Satze:

Theorem 8: In allen möglichen ebenen Punktsystemen von je n Elementen erreicht die Anzahl x_3 der Fundamentaltripel ihr Minimum mit dem Werte n.

Zum Beweise denke man sich in einem beliebig gegebenen Systeme $\mathfrak{P}_n$ die Verbindungsgeraden aller seiner Punktepaare gezogen und dadurch die Ebene in ein System von Primärflächen zerschnitten. Alsdann gehört irgend ein Punkt $\mathfrak{p}_i$ in bezug auf die Verbindungsgeraden der übrigen $n-1$ Punkte einer mindestens dreiseitigen Fläche $F(\mathfrak{p}_i)$ an mit resp. den Seiten

$$|\, \mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{l_1}\,, \quad \mathfrak{p}_{k_2}, \mathfrak{p}_{l_2}\,|, \quad \mathfrak{p}_{k_3}, \mathfrak{p}_{l_3}\,|, \cdots.$$

Die Vorstellungen zu fixieren, wähle an:

$$c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{l_1}) = +1.$$

Alsdann sind rücksichtlich der gegenseitigen Lage der Punkte

$$\mathfrak{p}_{k_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{l_1}$$

und eines in ihrer Verbindungsgeraden liegenden Grenzpunktes

$$\mathfrak{q}$$

der Fläche $F(\mathfrak{p}_i)$ drei Fälle zu unterscheiden:

1) entweder teilt $\mathfrak{q}$ die Strecke $\mathfrak{p}_{k_1} \text{——} \mathfrak{p}_{l_1}$,
2) oder es teilt $\mathfrak{p}_{k_1}$ die Strecke $\mathfrak{q} \text{——} \mathfrak{p}_{l_1}$,
3) oder es teilt $\mathfrak{p}_{l_1}$ die Strecke $\mathfrak{q} \text{——} \mathfrak{p}_{k_1}$.

Denselben entsprechend bestimmen aber die Winkel

$$1)\ \mathfrak{p}_{k_1}|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{l_1}| \text{ und } \mathfrak{p}_{l_1}|\mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_i|, \quad 2)\ \mathfrak{p}_{k_1}|\mathfrak{p}_{l_1}, \mathfrak{p}_i| \text{ und } \mathfrak{p}_{l_1}|\mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_i|,$$
$$3)\ \mathfrak{p}_{k_1}|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{l_1}| \text{ und } \mathfrak{p}_{l_1}|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k_1}|$$

notwendig je zwei Primärwinkel, da sonst die Gerade $|\mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{l_1}|$ nicht zur Begrenzung der Fläche $F(\mathfrak{p}_i)$ gehören würde.

In dem Falle, dafs $\mathfrak{p}_{k_1}$ und $\mathfrak{p}_{l_1}$ mit keinem dritten Punkte $\mathfrak{p}$ lineal liegen, definieren die drei Winkelpaare resp. die primären Strahlenbereiche oder Fundamentaltripel:

$$1)\ \mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{l_1}, \quad 2)\ \mathfrak{p}_{k_1}|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{l_1}, \quad 3)\ \mathfrak{p}_{l_1}|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k_1}.$$

In dem anderen Falle, dafs die Gerade $|\mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{l_1}|$ mehr als zwei Punkte $\mathfrak{p}$ und zwar in der Reihenfolge enthält

$$\text{——}\ \mathfrak{p}_1'\ \text{——}\ \mathfrak{p}_2'\ \text{——}\ \cdots\ \text{——}\ \mathfrak{p}_\mu'\ \text{——}$$
$$c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_\mu') = +1,$$

und dafs die zugehörige Seite der Fläche $F(\mathfrak{p}_i)$ innerhalb der Strecke gelegen

$$\mathfrak{p}_h' \text{——} \mathfrak{p}_{h+1}',$$

findet man analog die $\mu - 1$ Primärbereiche:

$$\mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_\mu';$$
$$\mathfrak{p}_2'|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_1'; \quad \mathfrak{p}_3'|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_2'; \cdots; \mathfrak{p}_h'|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{h-1}';$$
$$\mathfrak{p}_{\mu-1}'|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_\mu'; \quad \mathfrak{p}_{\mu-2}'|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{\mu-1}'; \cdots; \mathfrak{p}_{h+1}'\ \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{h+2}'.$$

Im Besonderen erkennt man, dafs von den μ Geraden

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_1'|, |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_2'|, \cdots, |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_\mu'|,$$

wenn überhaupt, nur die beiden

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_h'| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{h+1}'|$$

durch dritte Punkte $\mathfrak{p}$ gehen.

Besitzt also die Fläche $F(\mathfrak{p}_i)$ die Seiten

$$g_{i_1},\ g_{i_2},\ \ldots,\ g_{i_m},$$

und sind die Anzahlen der in diesen liegenden Punkte $\mathfrak{p}$ resp.

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_m,$$

so ist die Anzahl der hierdurch im Punkte $\mathfrak{p}_i$ definierten Fundamentaltripel gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i - m > 3.$$

Da hiernach in jedem Systeme $\mathfrak{P}_n$ ein beliebiger Punkt $\mathfrak{p}_i$ zu wenigstens drei verschiedenen Fundamentaltripeln gehört, kann deren Gesamtzahl nicht kleiner als n sein.

Das Beispiel einer aus den Ecken eines konvexen n-Seites gebildeten Punktgruppe zeigt, dafs für jeden Wert $n > 4$ auch wirklich Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ mit genau n Fundamentaltripeln existieren. Q. e. d.

Weil nach § 1 je zwei der einem Punktetripel an und für sich zugehörigen vier primären Strahlenbereiche das ebene Punktfeld bereits völlig überdecken, kann in einem Systeme aus mehr als drei Punkten ein Tripel derselben

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

immer nur einen einzigen Primärbereich involvieren:

$$\mathfrak{p}_x\,|\,\mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{p}_\infty\,|\,\mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z.$$

Gemäfs der eindeutigen Definition des Bereiches durch das Element

$$\mathfrak{p}_x \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{p}_\infty$$

soll dieses der Hauptpunkt des Fundamentaltripels genannt werden.

Das System der Fundamentaltripel eines ebenen Punktsystemes ist durch eine Reihe in der allgemeinen Natur des letzteren begründeter, ihm charakteristischer Eigenschaften ausgezeichnet. Es genügt, dieselben ausführlich für ein lineal unabhängiges Punktsystem zu entwickeln, indem sich aus diesen die entsprechenden für ein singuläres System unmittelbar ableiten lassen.

I. Zunächst erhellt, dafs die nämlichen zwei Punkte $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$ höchstens zwei Fundamentaltripeln gemeinsam sein können.

Denn sind zwei solche gegeben durch

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_m,$$

so stellen $\mathfrak{p}_l$ und $\mathfrak{p}_m$ die beiden Nachbarn sowohl des Punktes $\mathfrak{p}_k$ im Index $J(\mathfrak{p}_i)$ als des Punktes $\mathfrak{p}_i$ im Index $J(\mathfrak{p}_k)$ dar. Es besitzt aber ein Punkt in dem Index eines anderen immer zwei und nur zwei Nachbarn.

Zufolge dieser ersten Bemerkung werden sich die Fundamentaltripel eines Punktes $\mathfrak{p}_1$ zu nachstehenden Reihen ordnen:

1) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{l_1}, \mathfrak{p}_{l_2};\quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{l_2}, \mathfrak{p}_{l_3};\quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{l_3}, \mathfrak{p}_{l_4};\ \cdots;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{l_{\lambda-1}}, \mathfrak{p}_{l_\lambda},$

2) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{m_1}, \mathfrak{p}_{m_2};\quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{m_2}, \mathfrak{p}_{m_3};\quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{m_3}, \mathfrak{p}_{m_4};\ \cdots;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{m_{\mu-1}}, \mathfrak{p}_{m_\mu},$

$$\cdots\cdots\cdots

und die in den Indices dieser festgelegten Fortschreitungsrichtungen unzweideutig bestimmt. Wenn daher der Index des Punktes $\mathfrak{p}_n$ gegeben ist durch

$$'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1},$$

so veranschaulichen die $n-1$ Punktepaare

$$\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1; \quad \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_3; \ldots; \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{n-1}$$

ebensoviele Paare benachbarter Ecken in den $n-1$ Primärpolygonen

$$P_{n,1}, P_{n,2}, P_{n,3}, P_{n,4}, \ldots, P_{n,n-1},$$

wo diese definiert sind durch die Beziehungen:

$$P_{n,1}: \begin{array}{ll} 'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, & 'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_n, '\mathfrak{p}_1, \ldots, \\ J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_n, '\mathfrak{p}_2, \ldots, & J('\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_1, ''\mathfrak{p}_1, \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

$$P_{n,2}: \begin{array}{ll} 'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, & \bar{J}(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_2', \ldots, \\ J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_n, '\mathfrak{p}_3, \ldots, & J(\mathfrak{p}_2') = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2'', \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

$$P_{n,3}: \begin{array}{ll} 'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, & J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_3', \ldots, \\ J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_n, '\mathfrak{p}_4, \ldots, & J(\mathfrak{p}_3') = \mathfrak{p}_3, ''\mathfrak{p}_3, \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

$$P_{n,4}: \begin{array}{ll} 'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \ldots, & J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_4', \ldots, \\ J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_n, '\mathfrak{p}_5, \ldots, & J(\mathfrak{p}_4') = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_4'', \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

wo allgemein die Unterscheidungen

$$J(\mathfrak{p}_i) \quad \text{und} \quad \bar{J}(\mathfrak{p}_i)$$

den Wechsel des Drehungssinnes zum Ausdruck bringen.

Nach diesem Schema haben je zwei aufeinanderfolgende Gebilde

$$P_{n,i} \quad \text{und} \quad P_{n,i+1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-2)$$

ein Paar gemeinsamer Nachbarecken

$$\mathfrak{p}_n \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{i+1},$$

aus welchen sie durch entgegengesetzte Operationen abgeleitet werden. Sie stellen somit Gegengruppen in bezug auf dieses Eckenpaar dar.

Unter der speziellen durch eine passende Projektion von $\mathfrak{P}_n$ leicht zu erreichenden Voraussetzung, dafs die beiden Punkte $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{p}_1$ Nachbarecken in dem Primärpolygone der Punktgruppe $\mathfrak{p}_\infty\ \mathfrak{P}_n$ bilden, nimmt das Schema die präzisere Form an:

$$P_{n,1}: {}'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \quad {}'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_n, {}'\mathfrak{p}_1, \ldots,$$
$$P_{n,2}: {}'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \quad J'(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_2', \ldots,$$
$$P_{n,3}: {}'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \quad {}'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_n, {}'\mathfrak{p}_3, \ldots,$$
$$P_{n,4}: {}'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \ldots, \quad J'(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_4', \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

a) $n = 2n'$:

$$P_{n,n-1}: {}'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \quad {}'J(\mathfrak{p}_{n-1}) = \mathfrak{p}_n, {}'\mathfrak{p}_{n-1}, \ldots,$$
$$P_{1,2}: {}'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \quad J'(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1', \ldots;$$

b) $n = 2n' + 1$:

$$P_{n,n-1}: {}'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \quad J'(\mathfrak{p}_{n-1}) = \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{n-1}', \ldots,$$
$$\overline{P}_{1,2}: {}'J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \quad {}'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_n, {}'\mathfrak{p}_1, \ldots.$$

Demgemäfs sind die beiden Gruppen

$$P_{n,n-1} \quad \text{und} \quad P_{n,1}$$

nur in dem Falle eines ungeraden n Gegengruppen, wogegen dieselben bei geradem n als Nebengruppen in dem Primärwinkel

$$\mathfrak{p}_n \,|\, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{n-1}$$

einen gemeinsamen Grenzwinkel besitzen.

Weil nun zwei Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}$$

gemäfs den Indices

$$J(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots$$

stets Gegengruppen darstellen, und weil dieser Zusammenhang zwischen den Fundamentaltripeln einer Verkettung

$$\ldots \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \ldots$$

allen projektiven Umformungen des Systemes $\mathfrak{P}_n$ gegenüber sich invariant verhält, so folgt aus dem Schema, dafs in einem Punkte $\mathfrak{p}_i$

a) bei ungeradem n keinesfalls mehr als $n - 1$,
b) bei geradem n keinesfalls mehr als $n - 2$

primäre Punktetripel zusammenstofsen.

Es zeigt aber der Fall eines einem Kreise mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{p}_n$ in positivem Sinne eingeschriebenen regulären $n - 1$-Eckes

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \ldots, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2,$$

dafs der Mittelpunkt $\mathfrak{p}_n$

a) bei geradem n zu genau $n - 1$,
b) bei ungeradem n zu genau $n - 2$
verschiedenen Fundamentaltripeln gehört.

Man erhält somit den Satz:

III. In einem allgemeinen ebenen Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ kann ein beliebiger Punkt $\mathfrak{p}_i$, je nachdem die Zahl n der Elemente gerade oder ungerade ist, zu höchstens $n - 2$ oder zu $n - 1$ Fundamentaltripeln gehören, welche, falls das eine oder das andere Vorkommnis statthat, stets eine offene oder eine geschlossene Kette aufeinanderfolgender Gegengruppen konstituieren;

und als nächste Konsequenz:

In einem allgemeinen Punktsysteme $\mathfrak{P}_n$ übersteigt die Anzahl der Fundamentaltripel

a) bei geradem n, b) bei ungeradem n

keinesfalls den Wert

a) $\left[\frac{n(n-1)}{3}\right]$ b) $\left[\frac{n(n-2)}{3}\right]$.

Es sollen zwei Punkte

$$\mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k$$

als miteinander verkettet aufgefafst werden, wenn sie die Endelemente einer Punktefolge bestimmen

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{h_1}, \mathfrak{p}_{h_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{h_m}, \mathfrak{p}_k,$$

in welcher je zwei Nachbarpunkte einem und demselben Fundamentaltripel angehören. Dabei kann und mag die Verbindungsreihe stets in reduzierter Form, d. h. als aus durchweg verschiedenen Punkten bestehend angenommen werden.

Gemäfs dieser Definition ordnen sich innerhalb des gesamten Systemes $\mathfrak{P}_n$ alle mit einem beliebigen Punkte, etwa mit $\mathfrak{p}_1$, verketteten Punkte $\mathfrak{p}_i^{(h)}$ auf eine und nur eine Weise so zu einem mehrreihigen Schema

$$\begin{array}{l}
\mathfrak{p}_1, \\
\mathfrak{p}_1', \ \mathfrak{p}_2', \ \mathfrak{p}_3', \ \ldots, \ \mathfrak{p}_{m_1}', \\
\mathfrak{p}_1'', \ \mathfrak{p}_2'', \ \mathfrak{p}_3'', \ \ldots, \ \mathfrak{p}_{m_2}'', \\
\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot, \\
\mathfrak{p}_1^{(r)}, \ \mathfrak{p}_2^{(r)}, \ \mathfrak{p}_3^{(r)}, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_{m_r}^{(r)},
\end{array}$$

dafs allgemein die h^{to} Reihe alle diejenigen in den vorhergehenden

Reihen nicht vorhandenen Punkte $\mathfrak{p}_i$ enthält, welche den Fundamentaltripeln der Punkte $\mathfrak{p}_i^{(h-1)}$ der $(h-1)^{\text{ten}}$ Reihe angehören.

Die Bildungsweise des Schemas zeigt unmittelbar, dafs zwei Reihen nicht den nämlichen Punkt $\mathfrak{p}_i$ enthalten können. Es folgt daraus, dafs eine die Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_i$ verkettende Folge incl. ersterer mindestens $1 + h$ Elemente zählt, falls $\mathfrak{p}_i$ der h^{ten} Reihe angehört.

Die hier gegebene natürliche Zusammenfassung der mit einem und folglich unter einander verketteten Punkte zu einer in sich geschlossenen Gruppe legt die Frage nahe, ob dadurch im allgemeinen das vollständige System $\mathfrak{P}_n$ oder nur ein Bestandteil desselben dargestellt wird.

Behufs Entscheidung der Frage nehme man an, es sei für m Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_m$$

die Zusammengehörigkeit bereits nachgewiesen. Dann zeigt eine Rotation ihres als starr gedachten Systemes um einen festen Punkt die Notwendigkeit einer ersten Koincidenz

1) entweder eines Punktes $\mathfrak{p}_{m-h_1}$ mit einer Geraden $|\mathfrak{p}_{m+h_2}, \mathfrak{p}_{m+h_3}|$,

2) oder einer Geraden $|\mathfrak{p}_{m-h_1}, \mathfrak{p}_{m-h_2}|$ mit einem Punkte $\mathfrak{p}_{m+h_3}$.

Unter der gemachten Annahme giebt es daher stets noch mindestens ein Fundamentaltripel

$$1)\ \mathfrak{p}_{m-h_1}, \mathfrak{p}_{m+h_2}, \mathfrak{p}_{m+h_3}; \quad \text{oder} \quad 2)\ \mathfrak{p}_{m-h_1}, \mathfrak{p}_{m-h_2}, \mathfrak{p}_{m+h_3},$$

d. h. es gehört mindestens noch ein Punkt $\mathfrak{p}_{m+h}$ gleichfalls dem Schema an.

Hieraus und aus einem früher bewiesenen Satze, wonach ein Punkt $\mathfrak{p}_i$ stets zu drei oder mehr Fundamentaltripeln gehört, folgt aber die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung.

Der einfacheren Schreibweise wegen seien die Punkte

$$\mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m+2}, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

bezeichnet durch resp.

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{n-m}.$$

Setzt man alsdann die oben begonnene Bewegung des Systemes $\mathfrak{P}_m$ entsprechend den beiden unterschiedenen Koincidenzen, nämlich

1) des Punktes $\mathfrak{p}_i$ mit der Geraden $|\mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2}|$,

2) des Punktes $\mathfrak{q}_i$ mit der Geraden $|\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}|$,

in der Weise fort, dafs man es in positivem Sinne

1) um den Punkt $\mathfrak{p}_i$, 2) um den Punkt $\mathfrak{q}_i$

bis in eine erste solche Lage dreht, bei welcher

Bayerische Staats-Bibliothek München

a) ein Punkt $\mathfrak{p}_k$ mit einer Geraden $|\mathfrak{q}_{k_1}, \mathfrak{q}_{k_2}|$,

b) eine Gerade $|\mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{k_2}|$ mit einem Punkte $\mathfrak{q}_k$

zur Vereinigung gelangt, und vollzieht man weiter, die sich so bietenden vier Möglichkeiten einzeln verfolgend,

I) in dem ersten und vierten Falle je nach der ursprünglichen Zugehörigkeit der Punkte

1a) $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_k$, 2b) $\mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{q}_k$

I_1) zu einem und demselben, I_2) zu den beiden

durch resp. die Geraden

1a) $|\mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2}|$ und $|\mathfrak{q}_{k_1}, \mathfrak{q}_{k_2}|$, 2b) $|\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}|$ und $|\mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{k_2}|$

ursprünglich gebildeten zweiseitigen Flächen

I_1) eine positive bezw. eine negative Rotation des Systemes $\mathfrak{P}_m$ um den unendlich fernen Punkt der Geraden

1a) $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$, 2b) $|\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_k|$,

I_2) eine Parallelverschiebung des Systemes $\mathfrak{P}_m$ längs der Geraden

1a) $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$, 2b) $|\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_k|$,

II) in dem zweiten und dritten Falle je nach der ursprünglichen Zugehörigkeit der Punkte

1b) $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{q}_k$, 2a) $\mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{p}_k$,

II_1) zu einer und derselben, II_2) zu den beiden

durch resp. die Geraden

1b) $|\mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2}|$ und $|\mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{k_2}|$, 2a) $|\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}|$ und $|\mathfrak{q}_{k_1}, \mathfrak{q}_{k_2}|$

gebildeten zweiseitigen Flächen

II_1) eine Parallelverschiebung des Systemes $\mathfrak{P}_m$ längs der Geraden

1b) $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_k|$, 2a) $|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_i|$

nach der einen oder der anderen Seite —

II_2) eine Umdrehung des Systemes $\mathfrak{P}_m$ um den unendlich fernen Punkt der Geraden

1b) $|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_k|$, 2a) $|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_i|$

in positivem oder in negativem Sinne —

bis zu einer ersten neuen Koincidenz

α) entweder eines Punktes $\mathfrak{p}_l$ mit einer Geraden $|\mathfrak{q}_{l_1}, \mathfrak{q}_{l_2}|$,

β) oder einer Geraden $|\mathfrak{p}_{l_1}, \mathfrak{p}_{l_2}|$ mit einem Punkte $\mathfrak{q}_l$,

so gelangt man in jeder der behandelten Eventualitäten zu drei von einander verschiedenen Fundamentaltripeln:

$1\,a_\alpha)$ $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2}; \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_{k_1}, \mathfrak{q}_{k_2}; \quad \mathfrak{p}_l, \mathfrak{q}_{l_1}, \mathfrak{q}_{l_2};$

$1\,a_\beta)$ $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2}; \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_{k_1}, \mathfrak{q}_{k_2}; \quad \mathfrak{q}_l, \mathfrak{p}_{l_1}, \mathfrak{p}_{l_2};$

$1\,b_\alpha)$ $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2}; \quad \mathfrak{q}_k, \mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{k_2}; \quad \mathfrak{p}_l, \mathfrak{q}_{l_1}, \mathfrak{q}_{l_2};$

$1\,b_\beta)$ $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2}; \quad \mathfrak{q}_k, \mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{k_2}; \quad \mathfrak{q}_l, \mathfrak{p}_{l_1}, \mathfrak{p}_{l_2};$

$2\,a_\alpha)$ $\mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}; \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_{k_1}, \mathfrak{q}_{k_2}; \quad \mathfrak{p}_l, \mathfrak{q}_{l_1}, \mathfrak{q}_{l_2};$

$2\,a_\beta)$ $\mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}; \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_{k_1}, \mathfrak{q}_{k_2}; \quad \mathfrak{q}_l, \mathfrak{p}_{l_1}, \mathfrak{p}_{l_2};$

$2\,b_\alpha)$ $\mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}; \quad \mathfrak{q}_k, \mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{k_2}; \quad \mathfrak{p}_l, \mathfrak{q}_{l_1}, \mathfrak{q}_{l_2};$

$2\,b_\beta)$ $\mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}; \quad \mathfrak{q}_k, \mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{k_2}; \quad \mathfrak{q}_l, \mathfrak{p}_{l_1}, \mathfrak{p}_{l_2}.$

Da für den einfachsten Fall $m = 1$ die Existenz von Punktsystemen $\mathfrak{P}_n$ bereits nachgewiesen worden, in welchen die Gruppe $\mathfrak{P}_m$ mit den übrigen $n - m$ Elementen durch genau drei Fundamentaltripel verkettet erscheint, kann man als Verallgemeinerung eines früheren den Satz aussprechen:

Theorem 8a: Die Elemente zweier zu einander lineal unabhängigen Systeme

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m+2}, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

sind allemal durch wenigstens drei Fundamentaltripel verkettet.

Zu weiteren Beziehungen zwischen den Fundamentaltripeln führt die Untersuchung des Zusammenhanges des Systemes ihrer Charakteristiken mit demjenigen ihrer Hauptpunkte.

Man betrachte zunächst eine Reihe aufeinanderfolgender doppelt verketteter primärer Punktetripel mit einem gemeinsamen Elemente:

$$\text{I)} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \cdots.$$

Dann stehen folgende zwei Fragen zur Entscheidung:

1) Ist die Wahl der den vorliegenden Fundamentaltripeln zugehörigen Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1})$$

an Einschränkungen gebunden?

2) Wie gestaltet sich nach getroffener Wahl der Charakteristiken die Verteilung der Hauptpunkte?

Beide Fragen lassen eine gemeinsame Behandlung und zwar in der Weise zu, dafs zugleich mit der einen auch die andere ihre Erledigung findet. Dabei werden entsprechend den Annahmen entweder von durchweg gleichen oder von beliebig wechselnden Charakteristiken zwei Hauptfälle unterschieden.

Erster Hauptfall.

Gesetzt, es werden die Charakteristiken $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1})$ sämtlich gleich $+1$ angenommen, so bietet sich als Hauptpunkt des ersten Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$$

1) entweder $\mathfrak{p}_1$, 2) oder $\mathfrak{p}_2$, 3) oder $\mathfrak{p}_3$.

Im ersten Falle verteilen sich alle übrigen Punkte $\mathfrak{p}_i$ ausschliefslich auf die Scheitelfläche $F(\mathfrak{p}_1)$ und die Seitenfläche $F(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)$ der endlichen Dreiecksfläche $\triangle(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)$, und es folgt aus der Beziehung $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = +1$, dafs der Punkt $\mathfrak{p}_4$ der Fläche $F(\mathfrak{p}_1)$ angehört. Alsdann liegt aber $\mathfrak{p}_2$ in der Scheitelfläche $F(\mathfrak{p}_1)$ des Dreiecks

$$\triangle(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4)$$

und demnach innerhalb der beiden Winkel

$$\mathfrak{p}_3|\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1| \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_4|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3|.$$

Es mufs mithin $\mathfrak{p}_1$ auch der Hauptpunkt des durch die Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$ bestimmten Fundamentaltripels sein.

Da infolge dieses Schlusses die Voraussetzungen für die Verkettung

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_1; \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6; \quad \cdots$$

die nämlichen sind wie für die ursprünglich angenommene

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \cdots,$$

ist derselbe auch auf das dritte und weiter successive auf alle Tripel der angesetzten Reihe I übertragbar. Also gilt der Satz:

Wenn in einer Verkettung von Fundamentaltripeln der Form

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \cdots$$

allen Tripeln die gleiche Charakteristik zukommt, so ist ihr gemeinsames Element $\mathfrak{p}_1$ entweder für alle oder für kein einziges Hauptpunkt.

In dem ersten Falle bestimmt sich gemäfs den beiden Annahmen

$$\text{a)}\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) = +1, \qquad \text{b)}\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) = -1$$

der Index des Punktes $\mathfrak{p}_1$ durch:

$$\text{a)}\ {}'J(\mathfrak{p}_1) = \cdots, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2; \qquad \text{b)}\ {}'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \cdots;$$

der Index eines beliebigen Punktes $\mathfrak{p}_i$ aber durch:

$$\text{a)}\ {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1}, \cdots, \mathfrak{p}_{i+2}, \cdots, \mathfrak{p}_{i-2}, \cdots, \mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_1,$$

$$\text{b)}\ {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}, \cdots, \mathfrak{p}_{i-2}, \cdots, \mathfrak{p}_{i+2}, \cdots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_1.$$

Wird zweitens der Hauptpunkt des Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ durch den Punkt $\mathfrak{p}_2$ dargestellt, so kann der Punkt $\mathfrak{p}_4$ gemäfs der Bestimmung $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = +1$ nur in der Seitenfläche $F'(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3)$ der endlichen Dreiecksfläche $\triangle(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)$ liegen. Dann aber fällt $\mathfrak{p}_2$ in die Winkel

$$\mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4 | \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1 |,$$

und es ist der zu dem Fundamentaltripel $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$ gehörige primäre Strahlenbereich definiert durch

$$\mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3,$$

m. a. W. $\mathfrak{p}_4$ ist der Hauptpunkt dieses Fundamentaltripels.

Betrachtet man jetzt die beiden nächsten Tripel

$$\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5$$

mit den gleichen Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1) = c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5) = -1,$$

so folgt aus einem früheren Satze, dafs $\mathfrak{p}_1$ als Hauptpunkt des einen auch Hauptpunkt des anderen ist, und dafs deshalb und wegen der Beziehung $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5) = +1$ der Punkt $\mathfrak{p}_5$ in der Scheitelfläche $F(\mathfrak{p}_4)$ der endlichen Dreiecksfläche $\triangle(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4)$ liegt.

Auf Grund dieser Eigenschaften ist aber die Stellung des Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$ in der Verkettung

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7; \quad \cdots$$

durchaus analog derjenigen des Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ in der ursprünglichen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \cdots.$$

Man findet daher $\mathfrak{p}_6$ als gemeinsamen Hauptpunkt der beiden Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7$$

und zwar innerhalb des gemeinsamen Bereiches der zu den Dreiecken

$$\triangle(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5) \quad \text{und} \quad \triangle(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5)$$

gehörigen Seitenflächen

$$F_2(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5) \quad \text{und} \quad F_3(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5),$$

als Gebiet des Punktes $\mathfrak{p}_7$ dagegen den aufserhalb der Fläche $\mathfrak{p}_6 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5$, aber innerhalb des rücksichtlich der Gruppe $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5$ vorhandenen Primärwinkels $\mathfrak{p}_6 \mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_1$ gelegenen Teil jenes Bereiches.

Allgemein ergeben sich als Hauptpunkte der Fundamentaltripel einer Verkettung

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7; \quad \cdots$$

im Falle von durchweg gleichen Charakteristiken $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1})$

a) bei der Wahl des Punktes $\mathfrak{p}_2$ zum Hauptpunkte des Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$$

die Punkte:

$$\mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_6, \quad \mathfrak{p}_6, \quad \cdots,$$

b) bei der Wahl des Punktes $\mathfrak{p}_3$ zum Hauptpunkte des Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$$

die anderen:

$$\mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_5, \quad \mathfrak{p}_5, \quad \mathfrak{p}_7, \quad \cdots$$

Entsprechend diesen beiden Vorkommnissen sind die Punkte

$$\mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_5, \quad \mathfrak{p}_6, \quad \mathfrak{p}_7, \quad \cdots$$

in ihrer Lage an resp. die Flächen gebunden:

a) $\varphi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3), \quad \varphi(\mathfrak{p}_4), \quad \varphi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5), \quad \varphi(\mathfrak{p}_6), \quad \cdots,$

b) $\varphi(\mathfrak{p}_3), \quad \varphi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4), \quad \varphi(\mathfrak{p}_5), \quad \varphi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6), \quad \cdots,$

wo abkürzungsweise durch das Symbol

$$\varphi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$$

der Deckungsbereich der beiden Primärwinkel

$$\mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_{a_i}, \mathfrak{p}_i | \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1} |$$

des Punktsystemes

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i,$$

durch das andere

$$\varphi(\mathfrak{p}_{i+1})$$

der ausserhalb der Fläche $\mathfrak{p}_{i+1} | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i,$ aber innerhalb des Primärwinkels $\mathfrak{p}_{i+1} | \mathfrak{p}_{b_{i+1}}, \mathfrak{p}_1 |$ liegende Teil der Fläche $\varphi(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ bezeichnet wird.

Bei den bisher erörterten Möglichkeiten betreffend die Wahl des Hauptpunktes des Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ ist die eine aufser Acht gelassen worden, dafs besagtes Tripel einen eigentlichen Hauptpunkt überhaupt nicht besitzt, dafs also der zugehörige primäre Strahlenbereich gegeben sei durch

$$\mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3.$$

Diese Annahme ist in der That hier illusorisch, weil nach der-

selben alle anderen Punkte $\mathfrak{p}_i$ in die Fläche $\triangle(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)$ fallen, und folglich die Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4)$$

entgegengesetzt sein würden, was gegen die ursprüngliche Voraussetzung ist.

Zweiter Hauptfall.

In der zu diskutierenden Verkettung der Fundamentaltripel

$$1)\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;\quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5;\quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6;\quad \cdots$$

mögen sich die beiden benachbarten Tripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}$$

in ihren Charakteristiken unterscheiden, d. h. es sei

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i) = +1 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) = -1.$$

Alsdann sind betreffs der den beiden Fundamentaltripeln in ihrem gemeinsamen Punkte $\mathfrak{p}_1$ zugehörigen Primärwinkel zwei Möglichkeiten zu unterscheiden, nämlich:

a) entweder decken sich dieselben mit den Winkeln

$$\mathfrak{p}_1|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i-1}| \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1|\mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_i|,$$

b) oder sie sind identisch mit den anderen

$$\mathfrak{p}_1|\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i| \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}|.$$

Indem man von diesen einander durchaus analogen zwei Annahmen nur die erste in ihren Konsequenzen verfolgt, erkennt man, dafs sie zusammen mit den übrigen Voraussetzungen den Punkt $\mathfrak{p}_{i+1}$ seiner Lage nach an zwei getrennte Gebiete bindet, nämlich:

1) an die Scheitelfläche $F(\mathfrak{p}_{i-1})$, 2) an die Seitenfläche $F(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1})$ der endlichen Dreiecksfläche $\triangle(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i)$.

Dementsprechend bestimmen sich die primären Strahlenbereiche der beiden Fundamentaltripel durch resp.

$$1)\ \mathfrak{p}_{i-1}|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_\infty|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1},$$
$$2)\ \mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}.$$

Die erste örtliche Verteilung der vier Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_{i-1}, \quad \mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_{i+1}$$

beschränkt die übrigen Punkte der Verkettung auf den Deckungsbereich F_4 der beiden Winkel

$$\mathfrak{p}_1|\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}| \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i-1}|.$$

Deshalb und zufolge des Index

$J'(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i-2}, \mathfrak{p}_{i-3}, \ldots$ oder $'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i+2}, \mathfrak{p}_{i+3}, \ldots$

kommen den Fundamentaltripeln der beiden Reihen

1) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-2}, \mathfrak{p}_{i-1}$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-3}, \mathfrak{p}_{i-2}$; $\ldots$,

2) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i+2}$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+2}, \mathfrak{p}_{i+3}$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+3}, \mathfrak{p}_{i+4}$; $\ldots$

resp. die Charakteristiken zu:

1) $+1, +1, +1, \ldots$,

2) $+1, +1, +1, \ldots$.

Weil ferner die Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i+2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i-2}$$

durch den Übergang der Punkte

$$\mathfrak{p}_{i+2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{i-2}$$

aus resp. den Strecken

$$\overline{\mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{q}} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{q}}$$

$$(\mathfrak{q} \equiv (|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}|, |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i-1}|))$$

in die Fläche F_4 übergehen, sie also in resp.

$$\mathfrak{p}_{i+2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{i-1}$$

ihre Hauptpunkte besitzen, sind die Hauptpunkte beider Verkettungen dargestellt durch:

1) $\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i-3}, \ldots$,

2) $\mathfrak{p}_{i+2}, \mathfrak{p}_{i+2}, \mathfrak{p}_{i+4}, \ldots$.

Der letzte Umstand bestätigt die schon früher erwiesene Thatsache, dafs, soll die Verkettung eine cyklische sein, die Anzahl der Punkte des Systemes notwendig eine ungerade ist.

Die zweite oben als möglich erkannte Anordnung der vier Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}$$

zu den 2.3 Grenzpunkten der primären Strahlenbereiche

$$\mathfrak{p}_i | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}$$

bei den Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i) = +1 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) = -1$$

bindet die übrigen Elemente der Verkettung an den Deckungsbereich der beiden Winkel

$$\mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}| \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i | \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}|.$$

Je nachdem nun der Schnittpunkte der beiden Geraden

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i-1}|$$

mit dem Schnittpunkte der beiden anderen

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}|$$

a) auf einer und derselben, b) zu den beiden

Seiten der Geraden $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i|$ angenommen wird, besteht jener Bereich

a) entweder aus einer einzigen endlichen Fläche,

b) oder aus zwei im Unendlichen zusammenhängenden unendlichen Stücken.

Durch den im letzten Falle angestellten ganz ähnliche Schlüsse folgert man, dafs bei der Lage (a) den Fundamentaltripeln der beiden Reihen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-2}, \mathfrak{p}_{i-1}; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-3}, \mathfrak{p}_{i-2}; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-4}, \mathfrak{p}_{i-3}; \cdots,$$
$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i+2}; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+2}, \mathfrak{p}_{i+3}; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+3}, \mathfrak{p}_{i+4}; \cdots$$

notwendig einerseits die Charakteristiken zukommen

$$+1, \quad +1, \quad +1, \quad +1, \ \ldots,$$
$$-1, \quad +1, \quad +1, \quad +1, \ \ldots,$$

andererseits die Hauptpunkte zugehören

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_{i-2}, \quad \mathfrak{p}_{i-2}, \quad \mathfrak{p}_{i-4}, \ \ldots,$$
$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_{i+1}, \quad \mathfrak{p}_{i+3}, \quad \mathfrak{p}_{i+3}, \ \cdots.$$

Ein cyklischer Schlufs der Verkettung kann deshalb wiederum nur stattfinden, wenn die Anzahl der Punkte $\mathfrak{p}$ eine ungerade ist.

Teilt sich dagegen dem Falle (b) entsprechend der Deckungsbereich der beiden Winkel

$$\mathfrak{p}_1 |\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}| \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i |\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}|$$

in die zur Rechten und zur Linken der Geraden

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i|$$

gelegenen zwei Flächen

$$F'_{i+1} \quad \text{und} \quad {}'F_{i+1},$$

so bemerke man, dafs diese seitens der Geraden

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}$$

in respektive den unendlichen Strecken

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}|_\infty = s'_{1,i+1} \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_1|_\infty = {}'s_{1,i+1},$$

und die erste aufserdem noch von einem Teile

$$\bar{s}_{1,i-1}$$

der endlichen Strecke

$$\overline{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1}}$$

begrenzt werden.

Indem man alsdann die beiden Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_{i-1}\,,\ \mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_i\,,\ \mathfrak{p}_{i+1}$$

als das erste in der gegebenen Verkettung

$$\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_2\,,\ \mathfrak{p}_3\,;\ \ \mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_3\,,\ \mathfrak{p}_4\,;\ \ \ldots\,;\ \ \mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_{\lambda-1}\,,\ \mathfrak{p}_\lambda$$

auftretende Nachbarnpaar auffafst, welches einen Charakteristikenwechsel involviert

$$c(\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_{i-1}\,,\ \mathfrak{p}_i) = +1 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_i\,,\ \mathfrak{p}_{i+1}) = -1\,,$$

die Charakteristiken der folgenden Tripel aber ganz willkürlich vorschreibt, kann man die Verkettung durch folgende Konstruktion unzweideutig verifizieren:

Man lasse entsprechend den beiden Möglichkeiten

$$1)\ \ c(\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_{i+1}\,,\ \mathfrak{p}_{i+2}) = +1 \quad \text{und} \quad 2)\ \ c(\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_{i+1}\,,\ \mathfrak{p}_{i+2}) = -1$$

den Punkt $\mathfrak{p}_{i+2}$ aus der Strecke

$$1)\ \ s'_{1,i+1} \quad \text{und} \quad 2)\ \ {}'s_{1,i+1}$$

in die Fläche treten

$$1)\ \ F'_{i+1} \quad \text{und} \quad 2)\ \ {}'F_{i+1}.$$

Dabei überstreichen die Strahlen

$$|\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_{i+2}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_{i+1}\,,\ \mathfrak{p}_{i+2}|$$

gewisse Teile der Flächen

$$F'_{i+1} \quad \text{und} \quad {}'F_{i+1}\,,$$

und letztere reduzieren sich daher auf die anderen

$$F'_{i+2} \quad \text{und} \quad {}'F_{i+2}\,.$$

Da diese wiederum von im Unendlichen zusammenhängenden Strecken

$$|\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_{i+2}|_\infty = s'_{1,i+2} \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_{i+2}\,,\ \mathfrak{p}_1|_\infty = {}'s_{1,i+2}$$

der Geraden

$$|\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_{i+2}|$$

begrenzt werden, sind hiermit die Vorbedingungen für die Konstruierbarkeit des nächsten Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_{i+2}\,,\ \mathfrak{p}_{i+3}$$

bei ganz beliebiger Charakteristik

$$c(\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_{i+2}\,,\ \mathfrak{p}_{i+3}) = +1\,,$$

und weiter jedes folgenden bis zu dem letzten in analoger Weise erfüllt.

Zugleich bemerkt man, dafs auch die Hauptpunkte der successive entstehenden Fundamentaltripel unzweideutig bestimmt sind.

Bei den einzelnen Übergängen der Punkte

$$\mathfrak{p}_{i+2},\ \mathfrak{p}_{i+3},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{\lambda}$$

in respektive die Flächen

$$F_{i+1},\ F_{i+2},\ \ldots,\ F_{\lambda-1}$$

passiert keines der beweglichen Strahlenpaare

$$|\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{i+h}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_{i+h-1},\ \mathfrak{p}_{i+h}|$$

den Endpunkt $\mathfrak{p}_{i-1}$ der die ursprüngliche Fläche F'_{i+1} begrenzenden Strecke

$$\bar{s}_{1,i-1}.$$

Infolgedessen begrenzt diese in einem gewissen Bereiche notwendig auch die Fläche

$$F'_{\lambda} \equiv \bar{F}_{i-1}.$$

Hiernach kann man einen Punkt $\mathfrak{p}_{i-2}$ aus der Geraden $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1}|$ unmittelbar in die Fläche $\bar{F}_{i-1}$, darauf einen Punkt $\mathfrak{p}_{i-3}$ aus der Geraden $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-2}|$ unmittelbar in die Fläche F'_{i-2}, und so fort, schliefslich einen Punkt $\mathfrak{p}_2$ aus der Geraden $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3$ unmittelbar in die Fläche F'_3 eintreten lassen, wo allgemein F'_{i-h-1} den von den vorherigen Bewegungen nicht affizierten Teil der Fläche F'_{i-h} bezeichnet. Man gelangt so successive zu den Fundamentaltripeln

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{i-1},\ \mathfrak{p}_{i-2};\quad \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{i-2},\ \mathfrak{p}_{i-3};\quad \ldots;\quad \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_2$$

mit den gegebenen Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{i-1},\ \mathfrak{p}_{i-2}) = c(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{i-2},\ \mathfrak{p}_{i-3}) = \cdots = c(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_2) = -1$$

und ihren wohldefinierten Hauptpunkten

$$\mathfrak{p}_{i-2},\quad \mathfrak{p}_{i-2},\quad \mathfrak{p}_{i-4},\quad \mathfrak{p}_{i-4},\quad \ldots.$$

In Anbetracht, dafs zu dem Ausgange der Konstruktion auch das letzte Paar von benachbarten Fundamentaltripeln der gegebenen Reihe gewählt werden kann, welches einen Charakteristikenwechsel aufweist, wird man mithin den Satz formulieren:

Ist für eine Verkettung von Fundamentaltripeln

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3;\quad \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_4;\quad \ldots;\quad \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{\lambda-1},\ \mathfrak{p}_{\lambda}$$

eine Folge beliebig wechselnder Charakteristiken vorgeschrieben

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{\lambda-2},$$

so wird dadurch das System der Hauptpunkte entweder ein- oder zweideutig bestimmt.

Um jetzt noch kurz die entsprechenden Verhältnisse für die singulären Punktsysteme festzustellen, hat man zunächst die Frage zu entscheiden:

Wieviele der irgend zwei Punkte

$$\mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k$$

als Nachbarecken enthaltenden vier Primärgruppen

$$1)\ {}'\mathfrak{P}_{i,k},\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k \,|\, \mathfrak{P}'_{i,k}, \qquad 2)\ {}'\mathfrak{P}_{i,k} \,|\, \mathfrak{P}'_{i,k},\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,$$

$$3)\ {}'\mathfrak{P}_{i,k},\ \mathfrak{p}_i \,|\, \mathfrak{P}'_{i,k},\ \mathfrak{p}_k, \qquad 4)\ {}'\mathfrak{P}_{i,k},\ \mathfrak{p}_k \,|\, \mathfrak{P}'_{i,k},\ \mathfrak{p}_i$$

können Fundamentaltripel darstellen?

Dieselbe erledigt sich sogleich durch folgende einfache Konstruktion: Man ziehe durch zwei beliebige Punkte

$$\mathfrak{p}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2$$

je zwei Geraden

$$g_1,\ g_3 \quad \text{und} \quad g_2,\ g_4,$$

so dafs ihre vier gegenseitigen Durchschnitte

$$(g_1,\ g_2) \equiv \mathfrak{p}_3, \quad (g_2,\ g_3) \equiv \mathfrak{p}_4, \quad (g_3,\ g_4) \equiv \mathfrak{p}_5, \quad (g_4,\ g_1) \equiv \mathfrak{p}_6$$

in Bezug auf die Gerade

$$|\,\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2\,|$$

in der nämlichen Halbebene liegen, und fixiere innerhalb des einfachen konvexen Viereckes

$$\mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_5, \quad \mathfrak{p}_6$$

irgend $n - 6$ weitere Punkte

$$\mathfrak{p}_7,\ \mathfrak{p}_8,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n.$$

Alsdann stellen die vier Primärbereiche

$$\mathfrak{p}_1 \,|\, \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_2 \,|\, \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_3 \,|\, \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_\infty \,|\, \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_5$$

ebensoviele zu dem Punktepaar

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2$$

gehörige Fundamentaltripel des Systemes $\mathfrak{P}_n$ dar.

Mit der Eigenschaft I fällt auch ihre Konsequenz II. — In der That involviert das System*) der sechs Schnittpunkte von vier lineal unabhängigen Geraden in seinen zwölf Primärgruppen ebensoviele Fundamentaltripel, während nach II die Anzahl dieser in einem allgemeinen Systeme $\mathfrak{P}_6$ nicht zehn übersteigen kann.

---

*) Die Figur auf Tafel I veranschaulicht die analogen Verhältnisse in dem dualen Gebilde der sechs Verbindungsgeraden eines allgemeinen Punktequadrupels.

Dagegen ergiebt sich betreffs der durch das Theorem (8a) ausgesprochenen Beziehungen, dafs diese für die singulären Systeme erhalten bleiben und durch ganz analoge Schlüsse bewiesen werden. — Teilt man nämlich $\mathfrak{P}_n$ in zwei Untergruppen

$$\mathfrak{P}'_m \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_m' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}''_{n-m} \equiv \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \ldots, \mathfrak{p}_{n-m}''$$

und dreht eine von ihnen, etwa die letztere, in bestimmtem Sinne um ein festes im Endlichen oder Unendlichen liegendes Centrum, so mufs für einen ersten Zeitpunkt

1) entweder eine Gerade $|\mathfrak{p}_{k_1}'', \mathfrak{p}_{k_2}''|$ mit einem Punkte $\mathfrak{p}_i'$,

2) oder eine Gerade $|\mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}'|$ mit einem Punkte $\mathfrak{p}_k''$

zur Koincidenz gelangen.

Da hiernach im ersten Falle — es genügt, diesen zu betrachten — die Strahlen

$$|\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{k_1}''| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{k_2}''|$$

während des Überganges einen Punkt

$$\mathfrak{p}_x' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}_y''$$

nicht passieren können, bestimmen in dem ursprünglichen Systeme die Strahlenpaare

$$|\mathfrak{p}_{k_1}'', \mathfrak{p}_{k_2}''|, |\mathfrak{p}_{k_1}'', \mathfrak{p}_i'| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_{k_2}'', \mathfrak{p}_{k_1}''|, |\mathfrak{p}_{k_2}'', \mathfrak{p}_i'|$$

einzeln je einen Primärwinkel.

Liegen nun dem allgemeinsten Fall entsprechend auf der Geraden

$$|\mathfrak{p}_{k_1}'', \mathfrak{p}_{k_2}''|$$

von vorneherein r Punkte $\mathfrak{p}$ in der gleichlaufenden Folge

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{a-1}, \mathfrak{p}_{k_1}'', \mathfrak{p}_{a+1}, \ldots, \mathfrak{p}_c, \mathfrak{p}_{c+1}, \ldots,$$
$$\ldots, \mathfrak{p}_{b-1}, \mathfrak{p}_{k_2}'', \mathfrak{p}_{b+1}, \ldots, \mathfrak{p}_r,$$

und fällt der Punkt $\mathfrak{p}_i'$ bei seiner Vereinigung mit der Geraden in die Strecke

$$\mathfrak{p}_c \text{ —— } \mathfrak{p}_{c+1},$$

so bestehen ursprünglich auch die primären Strahlenbereiche:

$$\mathfrak{p}_c|\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{c-1}; \ \mathfrak{p}_{c-1}|\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{c-2}; \ \ldots; \ \mathfrak{p}_{k_1}''|\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{a-1}; \ \ldots; \ \mathfrak{p}_2|\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_1;$$
$$\mathfrak{p}_i'|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_r;$$
$$\mathfrak{p}_{r-1}|\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_r; \ \mathfrak{p}_{r-2}|\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{r-1}; \ \ldots; \ \mathfrak{p}_{k_2}''|\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{b+1}; \ \ldots; \ \mathfrak{p}_{c+1}|\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{c+2}.$$

Wie sich auch die $r-2$ Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{a-1}, \mathfrak{p}_{a+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{b-1}, \mathfrak{p}_{b+1}, \ldots, \mathfrak{p}_r$$

auf die beiden Gruppen verteilen mögen

$$\mathfrak{P}'_m \text{ und } \mathfrak{P}''_{n-m},$$

stets liefert die vorstehende Reihe zwei Fundamentaltripel der Formen

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l'', \mathfrak{p}_m'' \text{ oder } \mathfrak{p}_k'', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_m',$$

und nur in dem Falle

$$r = 2$$

resultiert das einzige

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{k_1}'', \mathfrak{p}_{k_2}''.$$

Dies festgestellt, kann man weiter ganz ebenso wie in dem allgemeinen Falle deduzieren.

Man erkennt nebenbei:

Ein Punkt $\mathfrak{p}_h$ eines linealen Systemes kann immer nur mit seinen beiden Nachbarn zu je einem bezw. zu je zwei Fundamentaltripeln gehören, und:

Wenn r in einer Richtung aufeinanderfolgende Punkte einer Geraden

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$$

mit einem aufserhalb gelegenen Punkte $\mathfrak{p}_i$ die Fundamentaltripel bestimmen

a) $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2;\ \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\ \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;\ \ldots;\ \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{r-1}, \mathfrak{p}_r;$

b) $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; \ldots; \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{a-1}, \mathfrak{p}_a;\ \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_r;\ \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{a+1}, \mathfrak{p}_{a+2}; \ldots; \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{r-1}, \mathfrak{p}_r,$

sind deren Hauptpunkte unabhängig von der Lage des Punktes $\mathfrak{p}_i$ auf der einen oder der anderen Seite der Geraden respektive:

$$\mathrm{a}_\alpha)\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_r, \quad \mathrm{a}_\beta)\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_{r-1},$$

$$\mathrm{b})\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{a+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}.$$

Das System der Fundamentaltripel ist gegenüber der Gesamtheit der Punktetripel eines Systemes $\mathfrak{P}_n$ ausgezeichnet durch den Satz:

Theorem 9: Ein ebenes Punktsystem $\mathfrak{P}_n$ bewahrt bei stetiger Bewegung seiner Elemente so lange einen invarianten Charakter, wie das System seiner primären Punktetripel bestehen bleibt.

In der That besagt die Definition des Charakters eines Systemes $\mathfrak{P}_n$ zunächst nichts anderes, als dafs derselbe sich allemal und nur

gleichzeitig mit der Charakteristik eines Punktetripels ändert. Stellen aber die Punkte

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

dasjenige Tripel dar, welches bei der kontinuierlichen Bewegung des Systemes $\mathfrak{P}_n$ zuerst von allen

a) aus singulärer in allgemeine,

b) aus allgemeiner in singuläre

Lage übergeht, so werden die beiden Geradenpaare

$$|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i|, \quad |\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k|, \quad |\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i|$$

a) kurz nach dem Austritt aus einer Geraden,

b) kurz vor dem Eintritt in eine Gerade

je einen Primärwinkel bestimmen, die drei Punkte also ein Fundamentaltripel bilden.

Hierin bewirkt die Annahme, dafs eine der drei Geraden

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|, \quad |\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|, \quad |\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i|$$

mehr als zwei, etwa λ, Punkte enthält, nur insofern einen Unterschied, als dann statt des einen gleichzeitig $\lambda - 1$ Fundamentaltripel ihren Charakter ändern.

Ist das Punktsystem $\mathfrak{P}_n$ durch sein Indexsystem definiert, so läfst letzteres nach Theorem (6) ein Punktetripel

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

als ein primäres oder fundamentales erkennen, wenn je zwei Punkte in dem Index des dritten als Nachbarelemente auftreten, wenn also die Indices der drei genannten Punkte die Formen haben:

$$J(\mathfrak{p}_i) = \cdots, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \cdots; \qquad J(\mathfrak{p}_k) = \cdots, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \cdots;$$
$$J(\mathfrak{p}_l) = \cdots, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \cdots.$$

Sein Hauptpunkt $\mathfrak{p}_i$ bestimmt sich dann weiter durch die Bedingung, dafs die Indices der beiden anderen Punkte

$$'J(\mathfrak{p}_k) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_l)$$

resp. die Punktepaare

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$$

in wechselnder Reihenfolge enthalten, und zwar gilt, je nachdem die Folge

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

a) positiv, b) negativ:

a) $'J(\mathfrak{p}_k) = \cdots, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \cdots, \quad 'J(\mathfrak{p}_l) = \cdots, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \cdots,$

b) $'J(\mathfrak{p}_k) = \cdots, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \cdots, \quad 'J(\mathfrak{p}_l) = \cdots, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \cdots.$

Dagegen treten sowohl in den Indices

$$'J(\mathfrak{p}_k) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_i)$$

die Punktepaare

$$\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k$$

als in den Indices

$$'J(\mathfrak{p}_l) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_i)$$

die Paare

$$\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$$

in entsprechender Reihenfolge auf, nämlich, je nachdem die Folge

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l$$

positiv oder negativ ist, in der vorgeschriebenen oder in der umgekehrten Anordnung.

Eine Ausnahme von dieser Regel besteht einzig und allein für ein etwaiges Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_a, \quad \mathfrak{p}_b, \quad \mathfrak{p}_c$$

mit dem primären Strahlenbereiche

$$\mathfrak{p}_\infty \,|\, \mathfrak{p}_a, \; \mathfrak{p}_b, \; \mathfrak{p}_c.$$

Da die Elemente desselben die Ecken eines endlichen Dreiseites bestimmen, welches die übrigen Punkte des Systemes $\mathfrak{P}_n$ einschliefst, ist es aus dem Indexsysteme leicht durch die Bedingung zu ermitteln, dafs in den drei Indices

$$'J(\mathfrak{p}_a), \quad 'J(\mathfrak{p}_b), \quad 'J(\mathfrak{p}_c)$$

resp. die Paare benachbarter Punkte

$$\mathfrak{p}_c, \mathfrak{p}_b; \quad \mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_c; \quad \mathfrak{p}_b, \mathfrak{p}_a,$$

je nachdem die Folge

$$\mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_b, \mathfrak{p}_c$$

das positive oder das negative Zeichen aufweist, in der angegebenen oder in der entgegengesetzten Ordnung auftreten.

Diese Kriterien machen es zwar leicht, in jedem gegebenen Falle die vorhandenen Fundamentaltripel successive abzulesen, reichen aber nicht aus, im allgemeinen über die Existenz solcher Tripel und deren Minimalzahl einen Schlufs zu gestatten.

Um die durch das Theorem (8) ausgesprochenen Wahrheiten einzig und allein aus der Natur des Indexsystemes abzuleiten, bestimme man unter den $n - 1$ Punkten

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

von irgend einem Punkte $\mathfrak{p}_1'$ aus eine Folge

$$^*)\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i+1}', \ldots,$$

in welcher jeder folgende Punkt $\mathfrak{p}_{i+1}'$ aus dem Index des vorhergehenden Punktes $\mathfrak{p}_i'$ als ein Nachbar des Punktes $\mathfrak{p}_1$ durch die nähere Bedingung eindeutig definiert ist, dafs in dem besagten Index $J(\mathfrak{p}_i')$ das Punktepaar $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_{i-1}'$ durch das andere $\mathfrak{p}_{i-2}'$, $\mathfrak{p}_{i+1}'$ getrennt ist.

Diese Definition läfst für die Wahl der beiden Elemente $\mathfrak{p}_2'$ und $\mathfrak{p}_3'$ folgende vier Möglichkeiten offen:

1) $'J(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2', \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_2') = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3', \ldots;$
2) $'J(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2', \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_2') = \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_1, \ldots;$
3) $'J(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_1, \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_2') = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3', \ldots;$
4) $'J(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_1, \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_2') = \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_1, \ldots.$

Zu jeder derselben gehört alsdann eine unzweideutig bestimmte Folge

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5', \ldots, \mathfrak{p}_m', \mathfrak{p}_{m+1}',$$

deren Endelement $\mathfrak{p}_{m+1}'$ das erste mit einem der vorhergehenden identische Element bezeichnet.

Ich behaupte, dafs dieser Punkt $\mathfrak{p}_{m+1}' \equiv \mathfrak{p}_i'$ allemal mit dem Punkte $\mathfrak{p}_{m-1}'$ zusammenfällt, dafs also die drei Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{m-1}', \mathfrak{p}_m'$$

ein Fundamentaltripel bestimmen.

Die Vorstellungen zu fixieren, werde die Reihe

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_m', \mathfrak{p}_{m+1}'$$

als der ersten Annahme entsprechend, das Zeichen der Punktefolge

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2'$$

unbeschadet der Allgemeinheit als positiv vorausgesetzt. — Hiernach und laut den in § 1 getroffenen Unterscheidungen der von zwei Geraden

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l|$$

eingeschlossenen beiden Flächen durch die resp. Symbole

$$\mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k| \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|$$

überdeckt der Primärwinkel $\mathfrak{p}_1'|\mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_1|$ zusammen mit der Fläche $\mathfrak{p}_2'|\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_1|$ den Strahlenbereich

$$\mathfrak{p}_2'|\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_1 = S_1$$

---

*) Auf der zugehörigen Tafel II finden sich der Punkt $\mathfrak{p}_1$ durch I, die Punkte $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots$ durch 1, 2, ... wiedergegeben.

und als einen Bestandteil desselben die Fläche

$$\mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2' | .$$

Zufolge der Annahme

$$'J(\mathfrak{p}_2') = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3', \ldots$$

wird der Punkt $\mathfrak{p}_3'$ der letztgenannten Fläche angehören und zwar

a) entweder der Scheitelfläche $F(\mathfrak{p}_1)$,

b) oder der Seitenfläche $F(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2')$

des endlichen Dreieckes

$$\triangle(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2').$$

In dem einen wie in dem anderen Falle bestimmen die beiden Flächen

$$\mathfrak{p}_2' | \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_1 | \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_2' |$$

als einen den Punkt $\mathfrak{p}_1'$ ausschliefsenden Bestandteil des Strahlenbereiches

$$\mathfrak{p}_2' \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1'$$

den anderen

$$\text{a)} \quad \mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3' = S_2, \qquad \text{b)} \quad \mathfrak{p}_2' | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3' = S_2$$

und innerhalb desselben den Flächenwinkel

$$\text{a)} \quad \mathfrak{p}_3' | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2' |, \qquad \text{b)} \quad \mathfrak{p}_3' | \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_1 |.$$

Gemäfs der obigen Definition des Punktes $\mathfrak{p}_4'$ trennen sich die von $\mathfrak{p}_3'$ ausgehenden zwei Strahlenpaare

$$| \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_1' |, | \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4' | \quad \text{und} \quad | \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_1 |, | \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_2' |,$$

und es gehört daher der Punkt $\mathfrak{p}_4'$ dem eben ermittelten Strahlenbereiche S_2 an.

Es liegen aber die Verhältnisse in dem neuen Punktequadrupel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4'$$

ganz analog denjenigen in dem alten

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3'.$$

Die drei Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4'$$

bestimmen als einen den Punkt $\mathfrak{p}_2'$ ausschliefsenden Bestandteil des Strahlenbereiches S_2 einen neuen Bereich S_3, und dieser wird zufolge der Trennung der beiden Strahlenpaare

$$| \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_1 |, | \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_3' | \quad \text{und} \quad | \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_2' |, | \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5' |$$

seinerseits den Punkt $\mathfrak{p}_5'$ enthalten.

Indem man diese Schlufsweise auf das Quadrupel

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3',\ \mathfrak{p}_4',\ \mathfrak{p}_5'$$

und weiter auf jedes neu entstehende anwendet, erhält man ein durch die Punktetripel

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2';\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2',\ \mathfrak{p}_3';\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3',\ \mathfrak{p}_4';\ \ldots;\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{m-1}',\ \mathfrak{p}_m'$$

bestimmtes System von Strahlenbereichen

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_{m-1},$$

in welchem allgemein der Bereich S_{i+1} einen den Punkt $\mathfrak{p}_i'$ ausschliefsenden Bestandteil des Bereiches S_i darstellt.

Hiernach werden die $m-2$ Punkte

$$\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{m-2}'$$

sämtlich aufserhalb des durch das Tripel

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{m-1}',\ \mathfrak{p}_m'$$

bestimmten Strahlenbereiches S_{m-1} liegen.

Nun ist nach Voraussetzung der Punkt $\mathfrak{p}_{m+1}'$ einerseits enthalten in der Reihe

$$\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{m-2}',\ \mathfrak{p}_{m-1}',$$

andererseits gelegen innerhalb oder auf der Grenze des Bereiches

$$S_{m-1}.$$

Also mufs der Punkt $\mathfrak{p}_{m+1}'$ allemal mit dem Punkte $\mathfrak{p}_{m-1}'$ identisch sein, und die drei Punkte

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{m-1}',\ \mathfrak{p}_m'$$

bestimmen, wie behauptet, ein Fundamentaltripel.

Da in der Reihe der Strahlenbereiche

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots$$

jeder folgende in dem vorhergehenden vollständig enthalten ist, so gilt dieses auch von den im Strahlenbüschel $S(\mathfrak{p}_1)$ ihres gemeinsamen Grenzelementes $\mathfrak{p}_1$ ihnen zugehörigen Winkeln

$$\mathfrak{p}_1\,|\,\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2'\,|,\ \mathfrak{p}_1\,|\,\mathfrak{p}_3',\ \mathfrak{p}_2'\,|,\ \mathfrak{p}_1\,|\,\mathfrak{p}_3',\ \mathfrak{p}_4'\,|,\ \mathfrak{p}_1\ \ \mathfrak{p}_5',\ \mathfrak{p}_4'\ ,\ \ldots.$$

Infolgedessen müssen in dem Systeme der Strahlen

$$|\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_1'|,\ |\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2'|,\ |\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3'|,\ |\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_4'|,\ |\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_5'|,\ |\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_6'|,\ \ldots$$

von je vier aufeinanderfolgenden Elementen das erste und vierte durch das zweite und dritte getrennt werden, und es ergiebt sich der Index des Punktes $\mathfrak{p}_1$ in der Form

a) bei geradem m:

$$'J(\mathfrak{p}_1)=\mathfrak{p}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_4',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{m-2}',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_m',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{m-1}',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_5',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_3',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_1',\ \ldots.$$

b) bei ungeradem m:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_4', \ldots, \mathfrak{p}_{m-3}', \ldots, \mathfrak{p}_{m-1}', \ldots, \mathfrak{p}_m', \ldots, \mathfrak{p}_5', \ldots, \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_1', \ldots.$$

Auf ganz analoge Weise läfst sich der Index eines beliebigen Punktes $\mathfrak{p}_i'$ in bezug auf die übrigen Punkte $\mathfrak{p}_h'$ der vorstehenden Reihe ableiten.

Es liegt nämlich $\mathfrak{p}_i'$ innerhalb der Strahlenbereiche

$$S_1, S_2, \ldots, S_{i-2}$$

und auf der Grenze der beiden anderen

$$S_{i-1} = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i-1}', \mathfrak{p}_i' \quad \text{und} \quad S_i = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i+1}',$$

dagegen aufserhalb der Bereiche

$$S_{i+1}, S_{i+2}, \ldots, S_{m-1}.$$

Infolgedessen bestimmen innerhalb der einzelnen Bereiche

$$S_1, S_2, \ldots, S_{i-2}$$

die im Punkte $\mathfrak{p}_i'$ sich kreuzenden Strahlen ebensoviele Strahlenwinkel

$$w_1(\mathfrak{p}_i'), w_2(\mathfrak{p}_i'), \ldots, w_{i-2}(\mathfrak{p}_i'),$$

von denen jeder folgende einen Bestandteil des vorhergehenden darstellt. Weil aber gemäfs der Definition eines Strahlenbereiches

$$S_h = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_h', \mathfrak{p}_{h+1}'$$

der demselben im Punkte $\mathfrak{p}_h'$ zugehörige Grenzwinkel als ein primärer keinen Punkt $\mathfrak{p}$ einschliefst, müssen die beiden Grenzstrahlen des in diesem Bereiche zu $\mathfrak{p}_i'$ gehörigen Strahlenwinkels nach den Punkten $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_{h+1}'$ führen, d. h. es ergiebt sich der Winkel $w_h(\mathfrak{p}_i')$ in einer der beiden Formen:

1) $w_h(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_i' \,|\, \mathfrak{p}_{h+1}', \mathfrak{p}_1 \,|$ oder 2) $w_h(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_i' \,|\, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{h+1}' \,|$.

Hieraus und aus dem schon erwähnten Umstande, dafs von zwei aufeinanderfolgenden Winkeln

$$w_h(\mathfrak{p}_i') \quad \text{und} \quad w_{h+1}(\mathfrak{p}_i')$$

der erste den zweiten einschliefst, findet man

1) $w_h(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_i' \,|\, \mathfrak{p}_{h+1}', \mathfrak{p}_1 \,|$ und $w_{h+1}(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_i' \,|\, \mathfrak{p}_{h+2}', \mathfrak{p}_1 \,|$

oder

2) $w_h(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_i' \,|\, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{h+1}' \,|$ und $w_{h+1}(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_i' \,|\, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{h+2}' \,|$,

$$(h = 1, 2, \ldots, i-2).$$

Also resultiert der Index des Punktes $\mathfrak{p}_i'$ in bezug auf das Punktsystem

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}'$$

in einer der beiden Darstellungen:

1) $'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}', \ldots, \mathfrak{p}_{i-2}', \ldots, \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_1', \ldots,$

2) $'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}', \ldots,$

und nach Voraussetzung:

1) $'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}', \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}', \ldots, \mathfrak{p}_{i-2}', \ldots, \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_1', \ldots,$

2) $'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}', \ldots, \mathfrak{p}_{i+1}'.$

Um die weitere Bildung des Index von $\mathfrak{p}_i'$ festzustellen, bemerke man, dafs nach den letzten Deduktionen rücksichtlich der Gruppe

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}', \mathfrak{p}_{i+2}', \mathfrak{p}_{i+3}', \mathfrak{p}_i'$$

die Indices bestehen:

$$\begin{aligned} J(\mathfrak{p}_1) &= \mathfrak{p}_{i+1}', \mathfrak{p}_{i+3}', \mathfrak{p}_{i+2}', \mathfrak{p}_i', \\ J(\mathfrak{p}_{i+1}') &= \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_{i+2}', \mathfrak{p}_{i+3}', \mathfrak{p}_i', \\ J(\mathfrak{p}_{i+2}') &= \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_{i+3}', \mathfrak{p}_{i+1}', \mathfrak{p}_i', \\ J(\mathfrak{p}_{i+3}') &= \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_{i+2}', \mathfrak{p}_{i+1}', \mathfrak{p}_i'. \end{aligned}$$

Dieselben involvieren nach einer bekannten Regel (§ 5 pag. 53 u. 54) den fünften Index:

$$J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}', \mathfrak{p}_{i+3}', \mathfrak{p}_{i+2}', \mathfrak{p}_{i-1}', \cdots.$$

Der weitere Vergleich der den ersten analog geltenden Indices

$$\begin{aligned} J(\mathfrak{p}_1) &= \mathfrak{p}_{i+2}', \mathfrak{p}_{i+4}', \mathfrak{p}_{i+3}', \mathfrak{p}_i', \\ J(\mathfrak{p}_{i+2}') &= \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_{i+3}', \mathfrak{p}_{i+4}', \mathfrak{p}_i', \\ J(\mathfrak{p}_{i+3}') &= \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_{i+4}', \mathfrak{p}_{i+2}', \mathfrak{p}_i', \\ J(\mathfrak{p}_{i+4}') &= \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_{i+3}', \mathfrak{p}_{i+2}', \mathfrak{p}_i' \end{aligned}$$

liefert entsprechend:

$$J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+3}', \mathfrak{p}_{i+4}', \mathfrak{p}_{i+2}', \mathfrak{p}_{i-1}', \cdots.$$

Wendet man diese Schlufsweise nacheinander auf die Quadrupel an

$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i+1}', \mathfrak{p}_{i+2}', \mathfrak{p}_{i+3}'; \quad \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i+2}', \mathfrak{p}_{i+3}', \mathfrak{p}_{i+4}'; \ldots; \quad \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{m-2}', \mathfrak{p}_{m-1}', \mathfrak{p}_m',$

so erhält man schliefslich den gesuchten Index:

$$J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}', \ldots, \mathfrak{p}_{i+3}', \ldots, \mathfrak{p}_{i+5}', \ldots, \mathfrak{p}_{i+4}', \ldots, \mathfrak{p}_{i+2}', \ldots$$
$$\ldots, \mathfrak{p}_{i-1}', \ldots, \mathfrak{p}_{i-2}', \ldots, \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_1', \cdots.$$

Speziell ergeben sich die Indices der Elemente des Fundamentaltripels:

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_5', \ldots, \mathfrak{p}_6', \ldots, \mathfrak{p}_4', \ldots, \mathfrak{p}_2', \ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_{m-1}') = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_m', \ldots, \mathfrak{p}_{m-2}', \ldots, \mathfrak{p}_{m-3}', \ldots, \mathfrak{p}_{m-4}', \ldots, \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_1', \ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_m') = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{m-1}', \ldots, \mathfrak{p}_{m-2}', \ldots, \mathfrak{p}_{m-3}', \ldots, \mathfrak{p}_{m-4}', \ldots, \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_1', \ldots.$$

Bezeichnet man daher das System der Punkte

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_{m-1}', \mathfrak{p}_m'$$

als eine dem Punkte $\mathfrak{p}_1$ zugeordnete Fundamentalreihe, so kann man den Satz aussprechen:

Theorem 10: In einer zu einem Punkte

$$\mathfrak{p}_1$$

gehörigen Fundamentalreihe

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_m'$$

ist der Index eines beliebigen in bezug auf alle anderen Elemente bis auf den Drehungssinn eindeutig bestimmt.

Ferner schliefst man aus der Bildungsweise der Indices:

Teilt man eine Fundamentalreihe in irgend zwei Gruppen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_i' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{i+1}', \mathfrak{p}_{i+2}', \ldots, \mathfrak{p}_m',$$

so liegt die zweite innerhalb einer von den Geraden der ersten gebildeten Primärfläche.

Im Vorstehenden ist gezeigt worden, dafs ein beliebiger Punkt $\mathfrak{p}_1$ mindestens einem Fundamentaltripel angehört. Da das dabei angewandte Beweisverfahren nicht nur in der Bestimmung der Fundamentalgruppe

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \ldots$$

vier verschiedene Möglichkeiten zuläfst, sondern auch die Wahl des Ausgangspunktes $\mathfrak{p}_1'$ völlig freistellt, fragt es sich, ob nicht aus dieser Modifizierbarkeit des Verfahrens ebenfalls die schon früher bewiesene Existenz von mindestens drei den Punkt $\mathfrak{p}_1$ enthaltenden Fundamentaltripeln geschlossen werden kann.

Zu dem Ende nehme man die beiden Punkte

$$\mathfrak{p}_{m-1}' = \mathfrak{p}_1'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_m' = \mathfrak{p}_1'''$$

zu den Ausgangspunkten zweier Fundamentalgruppen

$$\mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'', \mathfrak{p}_4'', \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1''', \mathfrak{p}_2''', \mathfrak{p}_3''', \mathfrak{p}_4''', \ldots$$

und bestimme deren noch willkürliche Elemente

$$\mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2''', \mathfrak{p}_3'''$$

gemäfs den Bedingungen:

$$J(\mathfrak{p}_1'') = \cdots, \mathfrak{p}_m', \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2'', \ldots, \quad J(\mathfrak{p}_1''') = \cdots, \mathfrak{p}_{m-1}', \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2''', \cdots.$$

Dann schliefsen die durch die beiden Fundamentalreihen definierten zwei Strahlenbereiche

$$S_1'' \quad \text{und} \quad S_1'''$$

einander vollkommen aus, und folglich sind die in ihnen enthaltenen primären Bereiche

$$S_{m_2}'' \quad \text{und} \quad S_{m_3}''$$

notwendig von einander verschieden, d. h. der Punkt $\mathfrak{p}_1$ ist aufser dem Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{m-1}', \mathfrak{p}_m',$$

wie zu beweisen, mindestens noch zwei anderen gemeinsam.

Es liegt auf der Hand, dafs bei der unabhängigen Wahl des Anfangselementes

$$\mathfrak{p}_1' \equiv \mathfrak{p}_{a+1}''$$

die Fundamentalreihe

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_m'$$

möglicherweise nur einen Bestandteil einer anderen darstellt

$$\mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \ldots, \mathfrak{p}_a''; \mathfrak{p}_{a+1}'', \ldots, \mathfrak{p}_{a+m}'',$$
$$\mathfrak{p}_{a+h}'' \equiv \mathfrak{p}_h'.$$

Letztere zu finden, bestimme man eine Punktefolge

$$\mathfrak{p}_a'', \mathfrak{p}_{a-1}'', \mathfrak{p}_{a-2}'', \cdots$$

gemäfs den Bedingungen:

$$\begin{aligned}
J(\mathfrak{p}_a'') &= \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a+1}'', \ldots, \mathfrak{p}_{a+3}'', \ldots, \mathfrak{p}_{a+2}'', \ldots, \\
J(\mathfrak{p}_{a-1}'') &= \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_a'', \ldots, \mathfrak{p}_{a+2}'', \ldots, \mathfrak{p}_{a+1}'', \ldots, \\
J(\mathfrak{p}_{a-2}'') &= \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a-1}'', \ldots, \mathfrak{p}_{a+1}'', \ldots, \mathfrak{p}_a'', \ldots, \\
&\cdots\cdots\cdots

Im Besonderen kann es vorkommen, dafs unter den verschiedenen so ableitbaren vollständigen Fundamentalreihen eine das gesamte Punktsystem $\mathfrak{P}_n$ umfafst. Alsdann nimmt das Theorem (10) die Fassung an:

10a. Ordnen sich die Elemente eines allgemeinen Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ zu einer einzigen Fundamentalreihe, so wird durch diese das Indexsystem vollkommen und unzweideutig definiert.

Es gehöre eine solche Reihe zu dem Punkte $\mathfrak{p}_1$, und zwar sei sie dargestellt durch die Folge:

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n.$$

Das hierdurch bestimmte Indexsystem

$$\begin{aligned}
J(\mathfrak{p}_1) &= \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_8, \ldots, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3,\\
J(\mathfrak{p}_2) &= \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \ldots, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4,\\
J(\mathfrak{p}_3) &= \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_8, \ldots, \mathfrak{p}_9, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5,\\
J(\mathfrak{p}_4) &= \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_9, \ldots, \mathfrak{p}_{10}, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_6,\\
J(\mathfrak{p}_5) &= \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_8, \ldots, \mathfrak{p}_9, \mathfrak{p}_7,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ergiebt als primäre Punktgruppen von $\mathfrak{P}_n$:

1) die n Fundamentaltripel:

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4;\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5;\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6;\ \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7;\ \ldots;\ \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_1;$$
$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\ \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_1;$$

2) die $n - 4$ Fünfecke:

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5;\ \ldots;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{n-3}, \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{n-1};$$

3) die $5 + \frac{n}{2}(n - 5)$ Vierecke:

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1} \mid \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k+2};$$
$$k - i > 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 3.$$

In der Regel werden erst mehrere, stets aber die zu den Fundamentaltripeln eines Punktes gehörigen Fundamentalreihen das ganze Punktsystem $\mathfrak{P}_n$ erschöpfen.

In einem singulären Punktsysteme kann man bei der Bestimmung einer dem Punkte $\mathfrak{p}_1$ zugeordneten Fundamentalreihe

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_m'$$

von den λ verschiedenen Punkten der Geraden

$$|\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i+1}'$$

jeden beliebigen zum Punkte $\mathfrak{p}_{i+1}'$ wählen.

Die ausgezeichnete Stellung der primären Punktetripel legt es nahe, in ihnen die notwendigen und hinreichenden Bestimmungsstücke für die Charakterisierung aller Punktetripel zu vermuten und unter Angabe ihrer Charakteristiken und Hauptpunkte die vollständige Beschreibung des Punktsystemes zu versuchen. Bei der nicht unerheblichen Schwierigkeit der bezüglichen Untersuchungen sollen diese zunächst durch ihre Ausführung an den einfachsten Punktsystemen vorbereitet werden.

§ 8. Beschreibung der einfachsten Punktsysteme aus ihren Fundamentaltripeln.

1. Das System $\mathfrak{P}_4$.

Es seien die als lineal unabhängig, ihrer sonstigen Lage nach aber als unbestimmt vorausgesetzten vier Punkte des Systemes $\mathfrak{P}_4$ bezeichnet durch

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_4.$$

Da jeder Punkt $\mathfrak{p}_i$ mindestens drei Fundamentaltripeln gemein ist, bestimmt sich das System letzterer eindeutig durch:

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1; \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2.$$

Es stellt hiernach das System der vier Fundamentaltripel die Gesamtheit der Punktetripel von $\mathfrak{P}_4$ dar, so dafs zugleich mit ersterem das ganze Punktsystem charakterisiert ist.

Indem man nun die Elemente des ersten Fundamentaltripels gemäfs einer der beiden Beziehungen festlegt

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = \pm 1,$$

sind in jedem Falle für den Punkt $\mathfrak{p}_4$ innerhalb der um $\mathfrak{p}_1$ durch die Geraden

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3|$$

gebildeten vier Winkel ebensoviele den vier Vorzeichenkombinationen

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4) = \pm 1, \qquad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = \pm 1$$

entsprechende Lagen möglich.

Von den vier Winkeln um $\mathfrak{p}_1$ werden aber durch die Gerade $|\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3|$ genau drei in je zwei Flächen zerlegt, so dafs nur bei drei der vorhandenen vier Kombinationen

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4) = \pm 1, \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = \pm 1$$

die Charakteristik des vierten Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$$

nach Belieben wählbar bleibt, während sie in dem vierten Falle eindeutig bestimmt ist.

Zufolge dieser Betrachtungen lassen die beiden Annahmen

$$1)\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = +1 \quad \text{und} \quad 2)\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = -1$$

unter den vorhandenen $2 \cdot 8$ Vorzeichenkombinationen

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3), \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4), \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4), \quad c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4)$$

allein die folgenden zwei als geometrisch nicht realisierbar erkennen:

$$\begin{aligned} 1)\ & c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = +1, \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4) = -1, \\ & c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = +1, \quad c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1) = -1, \\ 2)\ & c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = -1, \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4) = +1, \\ & c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = -1, \quad c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = +1. \end{aligned}$$

Von den sieben anderen Paaren entgegengesetzter Vorzeichensysteme fallen resp. drei und vier unter die beiden typischen Formen:

$$\begin{aligned} 1)\ & c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1) = \pm 1, \\ 2)\ & c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1) = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = \pm 1, \end{aligned}$$

und es entsprechen denselben

1) entweder ein positiv bezw. ein negativ elliptisches Punktequadrupel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4,$$

2) oder ein positiv bezw. ein negativ hyperpolisches Quadrupel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, (\mathfrak{p}_4).$$

Infolgedessen sind die zu den vier ihren Charakteristiken nach gegebenen Fundamentaltripeln

$$\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1$$

gehörigen primären Strahlenbereiche vollkommen und unzweideutig bestimmt und zwar durch:

$$\begin{aligned} 1)\ & \mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1; \\ 2)\ & \mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1. \end{aligned}$$

Die übrigen primären Punktgruppen des betreffenden Quadrupels sind:

1) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$;

2) $\mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2$.

Da jedes der beiden anschauungslosen Charakteristikensysteme durch die Annahme einer indifferenten Charakteristik in den Grenzfall einer anschaulichen übergeht, und da in einem allgemeinen Punktequadrupel $\mathfrak{P}_4$ jeder Punkt gegenüber dem Systeme der drei anderen in einem durch die drei Verbindungsgeraden letzterer abgegrenzten Primärdreiseit liegt, erhellt weiter die Realisierbarkeit jeder solchen Vorzeichenkombination, bei welcher ein Vorzeichen unbestimmt, d. h. die Charakteristik eines Fundamentaltripels $= 0$ angenommen wird.

Man betrachte ein allgemeines, etwa positiv elliptisches, Quadrupel

$$\mathfrak{P}_4 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4.$$

Sowohl drei Strahlen der drei Primärbereiche

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$$

als vier Strahlen der vier anderen

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4 &= S_3(\mathfrak{p}_1), \quad \mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1 = S_3(\mathfrak{p}_2), \\ \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2 &= S_3(\mathfrak{p}_3), \quad \mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3 = S_3(\mathfrak{p}_4) \end{aligned}$$

bilden stets ein lineal unabhängiges Geradensystem.

Ein solches der zweiten Art sei dargestellt durch resp. die Geraden

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad g_4.$$

Alsdann teilen dieselben die Ebene in zwei vollständige Systeme von Scheitelflächen,

1) in eines aus den vier Primärdreiseiten

$$F_3(\mathfrak{p}_1), \quad F_3(\mathfrak{p}_2), \quad F_3(\mathfrak{p}_3), \quad F_3(\mathfrak{p}_4)$$

mit resp. den Punkten

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_4,$$

2) in eines aus den drei Primärvierseiten

$$F_4(\mathfrak{p}_1'), \quad F_4(\mathfrak{p}_2'), \quad F_4(\mathfrak{p}_3')$$

mit resp. den ersten abgeleiteten oder den Diagonalpunkten

$$(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1', \quad (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2', \quad (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_3'$$

des gegebenen Quadrupels

$$\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_2\,,\ \mathfrak{p}_3\,,\ \mathfrak{p}_4\,.$$

Die Richtigkeit der ersten Behauptung ist unmittelbar aus der Konstruktion, die der zweiten aber aus den Thatsachen ersichtlich,

a) dafs jedes Primärvierseit die vier Primärdreiseite, jedes Primärdreiseit die drei Primärvierseite zu Seitenflächen hat,

b) dafs irgend eine fünfte von den ersten vier unabhängige Gerade stets vier Primärflächen, und zwar nach (a) 2 Drei- und 2 Vierseite schneidet,

c) dafs der Durchschnitt zweier verschiedene Paare von Primärdreiseiten schneidenden Geraden in letzteren zu zwei Primärstrecken gehört, welche, durch je ein Seitenpaar der von der betreffenden Geraden geteilten Dreiseite abgegrenzt, die beiden Paare gegenüberliegender Seiten eines einfachen Viereckes verbinden,

d) dafs folglich die drei Paare solcher Geraden sich in den drei Primärvierseiten begegnen. Q. e. d.

Ganz analog ergiebt sich der duale Satz:

Die drei abgeleiteten oder Diagonalgeraden des Quadrupels

$$g_1\,,\ g_2\,,\ g_3\,,\ g_4\,,$$

nämlich die Strahlen

$$|(g_1, g_2), (g_3, g_4)| \equiv g_1'\,,\quad |(g_2, g_3), (g_4, g_1)| \equiv g_2'\,,\quad |(g_1, g_3), (g_2, g_4)| \equiv g_3'$$

gehören zu resp. den Primärbereichen

$$\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_4\,|\,\mathfrak{p}_2\,,\ \mathfrak{p}_3\,;\quad \mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_2\,|\,\mathfrak{p}_3\,,\ \mathfrak{p}_4\,;\quad \mathfrak{p}_\infty\,|\,\mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_2\,,\ \mathfrak{p}_3\,,\ \mathfrak{p}_4\,.$$

Die hiernach in der gegenseitigen Lage der beiden Quadrupel

$$\mathfrak{P}_4 \quad \text{und} \quad G_4$$

mit ihren Diagonalgebilden

$$\mathfrak{P}_3' \quad \text{und} \quad G_3'$$

allgemein herrschende Reciprocität ist unabhängig

a) sowohl von der Lage der Strahlen g_i in den vier Primärbereichen $S_3(\mathfrak{p}_i)$,

b) als von der Wahl der Punkte $\mathfrak{p}_i$ in den vier Primärflächen $F_3(\mathfrak{p}_i)$,

und gilt folglich ebenso für die in letzteren stets vorhandenen hyperbolischen Punktequadrupel.

Beide Fälle werden in gleicher Weise durch die Tafel III veranschaulicht.

Wenn zwei Punktequadrupel

$$\mathfrak{P}_4 \equiv \mathfrak{p}_1\,,\ \mathfrak{p}_2\,,\ \mathfrak{p}_3\,,\ \mathfrak{p}_4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_4' \equiv \mathfrak{p}_1'\,,\ \mathfrak{p}_2'\,,\ \mathfrak{p}_3'\,,\ \mathfrak{p}_4'$$

in den Charakteristiken je zweier entsprechenden Tripel übereinstimmen, werden sie als isothetische aufgefafst.

Da nach § 1 die Tripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3'$$

unter Wahrung ihres allgemeinen und endlichen Charakters und folglich auch der die Punkte

$$\mathfrak{p}_4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_4'$$

enthaltenden Primärdreiseite stetig in einander überführbar sind, gilt das Analoge auch von den vollständigen Quadrupeln

$$\mathfrak{P}_4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_4'.$$

Elliptische Quadrupel sind vierfach, hyperbolische dreifach isothetisch.

2. Das Punktsystem $\mathfrak{P}_5$.

Es seien die als lineal unabhängig, ihrer sonstigen Lage nach aber als unbestimmt vorausgesetzten fünf Punkte des Systemes $\mathfrak{P}_5$ bezeichnet durch

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5.$$

Da der Punkt $\mathfrak{p}_1$ gemeinsames Element von mindestens drei Fundamentaltripeln ist

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{x_1}, \mathfrak{p}_{y_1}; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{x_2}, \mathfrak{p}_{y_2}; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{x_3}, \mathfrak{p}_{y_3}; \quad \dots,$$

da ferner unter den sechs Punkten

$$\mathfrak{p}_{x_1}, \mathfrak{p}_{y_1}, \mathfrak{p}_{x_2}, \mathfrak{p}_{y_2}, \mathfrak{p}_{x_3}, \mathfrak{p}_{y_3}$$

jeder einzelne der vier Punkte

$$\mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_5$$

nach § 7 mindestens einmal und höchstens zweimal vorkommt, da endlich eine cyklische Verkettung von vier Fundamentaltripeln der Form

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_x; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_z, \mathfrak{p}_t$$

eine geometrische Unmöglichkeit ist, so gehört der Punkt zu genau drei Fundamentaltripeln in der allein zulässigen Anordnung

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m.$$

Hiernach kommen für die den Punkt $\mathfrak{p}_k$ enthaltenden drei Fundamentaltripel als wesentlich verschieden nur die beiden Annahmen in Frage:

1) $\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_1; \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_l; \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m;$

2) $\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_1; \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i; \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m.$

Im ersten Falle würden zum Punkte $\mathfrak{p}_l$ die drei Tripel gehören

$$\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_k; \quad \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m; \quad \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_1,$$

eine Forderung, die mit der lineal unabhängigen Lage der fünf Punkte $\mathfrak{p}_i$ unvereinbar ist.

Es kommt daher nur die zweite angegebene Möglichkeit in Betracht, und dieser zufolge werden die $2 \cdot 3$ Fundamentaltripel der beiden noch übrigen Punkte

$$\mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_m$$

dargestellt durch:

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_k; \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m; \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l;$$
$$\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_l; \quad \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i; \quad \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k.$$

Es sind somit durch die betreffs der drei Fundamentaltripel des Punktes $\mathfrak{p}_1$ anfangs getroffene Festsetzung die sämtlichen Fundamentaltripel des Punktsystemes ihren Elementen nach eindeutig bestimmt, und es gilt der Satz:

In einem lineal unabhängigen Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_5 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

existiert stets eine Anordnung

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$$

der vier Punkte

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

von der Beschaffenheit, dafs die fünf Punktetripel

$$\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$$

die Fundamentaltripel des Punktsystemes $\mathfrak{P}_5$ darstellen.

Es kann unbeschadet der Allgemeinheit von $\mathfrak{P}_5$ die Folge

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$$

mit der anderen

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

als identisch angenommen werden, so dafs die fünf Fundamentaltripel gegeben sind durch:

$$\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1.$$

Um festzustellen, wie viele verschiedene Reihen von Vorzeichen diese fünf Punktefolgen annehmen können, und in wie weit jede einzelne Reihe den Charakter des gesamten Punktsystemes bestimmt, beachte man, dafs, wenn irgend eine Reihe ein Punktsystem definiert, der entgegengesetzten dessen Spiegelbild entspricht. Dem-

gemäfs und wegen der Vertauschbarkeit der einzelnen Punkte sind betreffs der fraglichen Charakteristiken

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5$$

im wesentlichen folgende vier Annahmen zu unterscheiden und diese successive auf ihre Realisierbarkeit zu untersuchen, nämlich die Kombinationen:

1) $c_1 = +1,\ c_2 = +1,\ c_3 = +1,\ c_4 = +1,\ c_5 = +1,$
2) $c_1 = +1,\ c_2 = +1,\ c_3 = +1,\ c_4 = +1,\ c_5 = -1,$
3) $c_1 = +1,\ c_2 = +1,\ c_3 = +1,\ c_4 = -1,\ c_5 = -1,$
4) $c_1 = +1,\ c_2 = +1,\ c_3 = -1,\ c_4 = +1,\ c_5 = -1.$

Zunächst findet man, indem man die den fünf Punkten angehörigen Fundamentaltripel zu den Verkettungen ordnet

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \\
\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \\
\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \\
\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \\
\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2,
\end{array}$$

die Indices der fünf Punkte, abgesehen von dem jedesmaligen Drehungssinn, gegeben durch:

$$\begin{array}{ll}
J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, & J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \\
J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, & J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \\
\multicolumn{2}{c}{J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2.}
\end{array}$$

Schreibt man alsdann die Charakteristiken der Fundamentaltripel des Punktes $\mathfrak{p}_1$ gemäfs den oben unterschiedenen vier Fällen in den Formen

1) $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5) = +1,\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2) = -1,\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = +1,$
2) 3) 4) $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5) = -1,\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2) = -1,\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = +1,$

so bestimmen sich die Charakteristiken der übrigen Fundamentaltripel von $\mathfrak{p}_1$ nach einer pag. 31 abgeleiteten Regel*) durch:

1) $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2) = -1,\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3) = -1,\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3) = -1,$
2) 3) 4) $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2) = +1,\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3) = +1,\ c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3) = -1.$

*) Die allgemeine pag. 32 angeführte Zeichenregel, in welcher statt der Worte „von Zeichenwechseln statt hat“ die anderen zu setzen „negativer Vorzeichen vorhanden“, wird folgendermafsen erhalten:

Ganz analog bedingen die Charakteristiken der zu $\mathfrak{p}_2$ gehörigen Fundamentaltripel, nämlich:

1) 2) 3) $c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1) = +1, \quad c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3) = -1, \quad c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = +1,$

4) $c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1) = +1, \quad c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3) = -1, \quad c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = -1,$

Wenn entsprechend dem Index

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

die Charakteristiken gegeben

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3), \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4), \quad \ldots, \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n)$$

und wenn mit Hülfe des schon bekannten Kriteriums successive die weiteren gefunden sind

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4), \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5), \quad \ldots, \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_i),$$

so schliefst man unter der Annahme

1) $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i+2}) = \cdots = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{k-1}, \mathfrak{p}_k) = +1,$

2) $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}) = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i+2}) = \cdots = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{k-1}, \mathfrak{p}_k) = -1$

ausgehend von der zuletzt erhaltenen Charakteristik

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_i) = \pm 1$$

nach dem nämlichen Princip successive die anderen:

1) $c_{i+1} = \pm 1, \quad c_{i+2} = \pm 1, \quad c_{i+3} = \pm 1, \quad c_{i+4} = \pm 1, \ldots,$

2) $c_{i+1} = \mp 1, \quad c_{i+2} = \pm 1, \quad c_{i+3} = \mp 1, \quad c_{i+4} = \pm 1, \ldots,$

$$\left(c_{i+h} = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_{i+h})\right)$$

und erhält also

1) sowohl bei geradem als wie bei ungeradem,

2) a) bei geradem, b) bei ungeradem

$$k - i$$

die gesuchte Charakteristik

$$1) \; c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) = \pm 1,$$

$$2) \; a) \; c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) = \pm 1, \quad b) \; c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) = \mp 1,$$

wo durchgängig entweder das obere oder das untere Vorzeichen Geltung hat.

Es ergiebt sich hieraus, dafs, je nachdem die Charakteristikenreihe

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}), \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i+2}), \quad \ldots, \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{k-1}, \mathfrak{p}_k)$$

eine gerade oder eine ungerade Anzahl von einander getrennter, an sich ununterbrochener Folgen negativer Vorzeichen mit ungerader Gliederzahl enthält, d. h. je nachdem die Gesamtzahl dieser Vorzeichen eine gerade oder eine ungerade ist, der Punktefolge

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$$

das positive oder das negative Vorzeichen zukommt.

die anderen:

1) 2) 3) $c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3) = -1$, $c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4) = -1$, $c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4) = -1$,
4) $c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3) = -1$, $c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4) = +1$, $c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4) = +1$.

Weiter findet man aus den Charakteristiken

1) 2) $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = +1$, $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4) = -1$, $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5) = +1$,
3) $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = +1$, $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4) = -1$, $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5) = -1$,
4) $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = +1$, $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4) = +1$, $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5) = +1$

die anderen:

1) 2) $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4) = -1$, $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5) = -1$, $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5) = -1$,
3) $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4) = -1$, $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5) = +1$, $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5) = +1$,
4) $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4) = +1$, $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5) = +1$, $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5) = +1$.

Ferner ergeben sich aus den Charakteristiken

1) $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = +1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5) = -1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1) = +1$,
2) $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = +1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5) = -1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1) = -1$,
3) $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = +1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5) = +1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1) = -1$,
4) $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = -1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5) = -1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1) = -1$

die anderen:

1) $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5) = -1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1) = -1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1) = -1$,
2) $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5) = -1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1) = +1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1) = +1$,
3) $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5) = +1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1) = -1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1) = -1$,
4) $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5) = +1$, $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1) = -1$, $c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1) = +1$.

Endlich resultieren aus den Charakteristiken

1) $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1) = +1$, $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1) = -1$, $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = +1$,
2) 4) $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = +1$, $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1) = +1$, $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = +1$,
3) $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = -1$, $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1) = +1$, $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = +1$

die anderen:

1) $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1) = -1$, $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2) = -1$, $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2) = -1$,
2) 4) $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1) = +1$, $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2) = +1$, $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2) = +1$,
3) $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1) = -1$, $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2) = -1$, $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2) = +1$.

Betrachtet man in jedem der vier unterschiedenen Fälle die für die fünf Punktefolgen

$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$

im einzelnen abgeleiteten Vorzeichen, so erkennt man, dafs dieselben in dem ersten, dritten und vierten Falle unabhängig von der Art ihrer Bestimmung eindeutig definiert sind, dafs dagegen im zweiten Falle das Vorzeichen ein und desselben Tripels

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_4$$

sich einmal als positiv, ein anderes Mal als negativ ergiebt, dafs somit dieser Fall als in seinen Konsequenzen gegen die Voraussetzung der lineal unabhängigen Lage der fünf Punkte $\mathfrak{p}_i$ verstofsend illusorisch ist.

Die zweite Hauptfrage, ob jede der drei anderen Annahmen auch wirklich ein Punktesystem definiert, ist auf Grund einfacher topologischer Überlegungen, wie folgt, zu beantworten:

Der ersten Annahme entsprechen die fünf Ecken eines einfachen konvexen Fünfeckes, welche bei positivem Umlaufe desselben in der Folge auftreten

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_5.$$

Vertauscht man hierin die Bezeichnungen

$$\mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_4$$

mit resp.

$$\mathfrak{p}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_3$$

und nimmt die fünf Ecken ihrer Lage nach so an, dafs die in dem Systeme der Verbindungsgeraden von

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_5$$

den Punkt $\mathfrak{p}_2$ enthaltende Primärfläche aus zwei durch die unendlich ferne Gerade getrennten Teilen besteht, dann wird die einfache Verlegung des Punktes $\mathfrak{p}_2$ aus dem einen in den anderen Bestandteil die dem dritten Vorzeichensysteme der fünf Fundamentaltripel äquivalente Lage ergeben.

Indem man endlich unter ursprünglicher Annahme eines einfachen konvexen Fünfeckes mit der positiven Eckenfolge

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_5$$

die Lage der Ecken gemäfs der Bedingung wählt, dafs der Punkt $\mathfrak{p}_4$ in das Innere des durch die drei Geraden

$$|\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3|, \quad |\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5|, \quad |\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1|$$

bestimmten endlichen Dreiseites fällt, und dann die Punkte

$$\mathfrak{p}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2$$

auf resp. den Geraden

$$\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2|$$

sich stetig von deren Schnittpunkt entfernen läfst, bis sie nach Überschreitung der unendlich fernen Geraden in die Scheitelfläche $F(\mathfrak{p}_4)$ der Dreiecksfläche $\triangle(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5)$ eintreten, wird man zu einem der vierten Vorzeichenkombination entsprechenden Punktsysteme gelangen.

Die vorstehenden Ausführungen lehren den Satz:

Durch das Charakteristikensystem der Fundamentaltripel eines allgemeinen Punktsystemes $\mathfrak{P}_5$ wird dessen topologischer Charakter vollkommen bestimmt.

Gemäfs den die drei unterschiedenen Charakteristikenreihen

$$c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2), \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3), \quad c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4), \quad c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5), \quad c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1)$$

veranschaulichenden Punktgruppen bestimmen sich die primären Strahlenbereiche der fünf Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$$

vollkommen und unzweideutig durch:

1) $\mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_5 | \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1$;
3) $\mathfrak{p}_5 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_5 | \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1$;
4) $\mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$.

Die übrigen den drei Quadrupeln zugehörigen Primärgruppen sind resp.:

1) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5$;
$\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$;
3) $\mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_5 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3$;
$\mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4$;
4) $\mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_5 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3$;
$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4$.

Es teilen die Verbindungsgeraden von vier Punkten allgemeiner Lage die Ebene in zwölf dreiseitige Primärflächen. Von fünf lineal unabhängigen Punkten wird deshalb irgend ein Punkt $\mathfrak{p}_x$ gegenüber den die vier anderen verbindenden Geraden in einer von dreien derselben

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|, \quad |\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|, \quad |\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m|$$

begrenzten Fläche liegen Da alsdann der Punkt $\mathfrak{p}_x$ einerseits nach einem früheren Satze mit den drei Punktepaaren

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k; \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l; \quad \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$$

je ein Fundamentaltripel bestimmt und er andererseits nach einem eben geführten Beweise zu genau drei Fundamentaltripeln gehört, folgt, dafs gemäfs den fünf Fundamentaltripeln

$$\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$$

des vorliegenden Punktsystemes $\mathfrak{P}_5$ ein beliebiger Punkt

$$\mathfrak{p}_i$$

aufserhalb der Verbindungsgeraden der vier übrigen stetig in die drei Seiten

$$|\mathfrak{p}_{i-2}, \mathfrak{p}_{i-1}|, \quad |\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}|, \quad |\mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i+2}|$$

der ihn einschliefsenden Primärfläche übergehen kann.

Diese Bemerkung zusammen mit der anderen, dafs die oben als geometrisch nicht realisierbar erkannte Vorzeichenkombination (2) in eine darstellbare übergeht, wenn man ein Vorzeichen durch das entgegengesetzte ersetzt, läfst nicht nur die Gültigkeit des aufgestellten Satzes auch für den Fall eines singulären Punktsystemes $\mathfrak{P}_5$ erkennen, sondern zeigt zugleich, dafs mit der Annahme eines einzigen singulären Fundamentaltripels die Wahl der Charakteristiken der vier übrigen von jeder Beschränkung frei wird.

Es bilde das allgemeine System $\mathfrak{P}_5$ die positive Folge

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_5.$$

Die gegenseitigen Durchschnitte der zehn Geraden

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$$

seien respektive:

1) $(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, |\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3|) \equiv \mathfrak{q}_1, \quad (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, |\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4|) \equiv \mathfrak{q}_2, \ldots, (|\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1|, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2|) \equiv \mathfrak{q}_5,$

2) $(|\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1|, |\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3|) \equiv \mathfrak{r}_1, \quad (|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2|, |\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4|) \equiv \mathfrak{r}_2, \ldots, (|\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5|, |\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2|) \equiv \mathfrak{r}_5,$

3) $(|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, |\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3|) \equiv \mathfrak{f}_1, \quad (|\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3|, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4|) \equiv \mathfrak{f}_2, \ldots, (\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1|, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2|) \equiv \mathfrak{f}_5.$

Irgend fünf in den Primärbereichen

$$\mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \quad \mathfrak{p}_5 | \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1$$

der ursprünglichen Gruppe $\mathfrak{P}_5$ fixierte Strahlen

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad g_4, \quad g_5$$

gehören zu je dreien

$$g_i, \quad g_k, \quad g_l$$

den primären Strahlenbereichen

$$\mathfrak{p}_i | \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_k | \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_l | \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$$

des Punktetripels

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l,$$

zu je vieren

$$g_i, \quad g_k, \quad g_l, \quad g_m$$

den analogen Kontinuen

$$\mathfrak{p}_i | \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_k | \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_l | \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m, \quad \mathfrak{p}_m | \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i$$

des Quadrupels an

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_k, \quad \mathfrak{p}_l, \quad \mathfrak{p}_m.$$

Infolgedessen befinden sie sich stets in allgemeiner Lage und zerschneiden die Ebene

1) in fünf resp. die Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_5$$

enthaltende Primärdreiseite

$$F_3(\mathfrak{p}_1), \quad F_3(\mathfrak{p}_2), \quad F_3(\mathfrak{p}_3), \quad F_3(\mathfrak{p}_4), \quad F_3(\mathfrak{p}_5),$$

2) in ein die fünf Punkte

$$\mathfrak{q}_1, \quad \mathfrak{q}_2, \quad \mathfrak{q}_3, \quad \mathfrak{q}_4, \quad \mathfrak{q}_5$$

einschliefsendes Primärfünfseit,

3) in fünf um resp. die Punkte

$$\mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{r}_2, \quad \mathfrak{r}_3, \quad \mathfrak{r}_4, \quad \mathfrak{r}_5$$

sich ausbreitende Primärvierseite.

Entsprechend verteilen sich die Diagonalen des Geradensystemes

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad g_4, \quad g_5$$

auf die Primärbereiche des Punktsystemes $\mathfrak{P}_5$, nämlich:

1) die fünf Geraden

$$|(g_5, g_1), (g_2, g_3)| \equiv r_1, \quad |(g_1, g_2), (g_3, g_4)| \equiv r_2, \ \ldots, \quad |(g_4, g_5), (g_1, g_2)| \equiv r_5$$

auf die Kontinuen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \ \ldots, \quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2,$$

2) die fünf anderen

$$|(g_5, g_2), (g_1, g_3)| \equiv q_1, \quad (g_1, g_3), (g_2, g_4) \equiv q_2, \ \ldots, \quad (g_4, g_1), (g_5, g_2) \equiv q_5$$

auf das Primärfünfeck

$$\mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5.$$

Endliche innerhalb der fünf Flächen

$$F_3(\mathfrak{p}_1), \quad F_3(\mathfrak{p}_2), \quad F_3(\mathfrak{p}_3), \quad F_3(\mathfrak{p}_4), \quad F_3(\mathfrak{p}_5)$$

erfolgende Bewegungen der fünf Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_5$$

lassen den Charakter des Systemes $\mathfrak{P}_5$ ungeändert.

Da eine Primärfläche in dem Systeme der zehn Geraden

$$|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k|$$

nur dann auf einen Punkt zusammenschrumpft, wenn mindestens drei ihrer Grenzseiten

$$|\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{k_1}|, \quad |\mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{k_2}|, \quad |\mathfrak{p}_{i_3}, \mathfrak{p}_{k_3}|, \quad \ldots$$

zu gegenseitigem Durchschnitt gelangen, dieses Vorkommnis aber die gleichzeitige Koincidenz zweier durch ein und denselben Punkt $\mathfrak{p}$ gehenden Geraden bedingt, folglich das Ausscheiden einer Primärfläche an die Inversion eines Fundamentaltripels gebunden ist, so bleibt mit dem Charakter der Punktegruppe $\mathfrak{P}_5$ auch derjenige ihres Geradensystemes invariant.

Isothetische Punktegruppen

$$\mathfrak{P}_5 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_5' \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5'$$

können allemal unter Erhaltung des beiderseitigen Charakters durch endliche und stetige Bewegungen ihrer Elemente entsprechend zur Deckung gebracht werden.

Man hat hierzu während des nach pag. 125 immer möglichen analogen Überganges der gleichfalls isothetischen Gruppen

$$\mathfrak{P}_4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_4'$$

die Punkte

$$\mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_5'$$

nur innerhalb der sie enthaltenden Primärflächen im Endlichen mit fortzubewegen und man wird zu einem Systeme gelangen

$$\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \bar{\mathfrak{p}}_3, \bar{\mathfrak{p}}_4,$$

in dessen entsprechender Primärfläche $F_3(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_5')$ die Punkte

$$\mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_5'$$

durch eine endliche Strecke verbunden sind.

§ 9. Das Punktsystem $\mathfrak{P}_6$.

In einem Systeme aus sechs lineal unabhängigen, ihrer sonstigen Lage nach aber unbestimmten Punkten

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$$

bieten sich rücksichtlich des Zusammenhanges der Fundamentaltripel unter einander zufolge der bekannten in § 7 entwickelten allgemeinen Beziehungen von vorneherein folgende Möglichkeiten:

Es ist verkettet

I. jeder Punkt mit der Gruppe der übrigen durch genau drei Fundamentaltripel und zwar

1. entweder ein jeder mit nur vier der fünf anderen,
2. oder mindestens ein Punkt mit allen fünf anderen;

II. mindestens ein Punkt mit den fünf anderen durch vier Fundamentaltripel, kein zweiter mit den übrigen durch mehr als vier Fundamentaltripel;

III. mindestens ein Punkt mit den fünf anderen durch fünf Fundamentaltripel.

I_1. Es sei der Punkt $\mathfrak{p}_1$ mit den vier anderen

$$\mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_4,\ \mathfrak{p}_5 \quad .$$

verkettet durch die vier Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\ \ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;\ \ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5,$$

so resultieren als die den Punkt $\mathfrak{p}_6$ enthaltenden Fundamentaltripel gemäfs der Voraussetzung einzig und allein die drei Tripel:

$$\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2;\ \ \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5;\ \ \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4,$$

und daraus als die Fundamentaltripel der vier anderen Punkte resp. die Tripel:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \\
\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \\
\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \\
\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2.
\end{array}$$

I_2. Es seien die drei Fundamentaltripel des Punktes $\mathfrak{p}_1$ dargestellt durch

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\ \ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;\ \ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6,$$

so bieten sich für das dritte Fundamentaltripel des Punktes $\mathfrak{p}_3$ von vorneherein als wesentlich verschieden nur die beiden Annahmen:

$$\text{a)}\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \qquad \text{b)}\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6.$$

Bei der Wahl (a) ist das dritte Fundamentaltripel des Punktes $\mathfrak{p}_2$ notwendig mit einem der drei Fundamentaltripel identisch:

$$\alpha)\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6;\ \ \beta)\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5;\ \ \gamma)\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4.$$

Da in den Fällen (α) und (β) die vier Punkte

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_5$$

schon zu je drei Fundamentaltripeln gehören, die Punkte

$$\mathfrak{p}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_6$$

aber resp. zu nur einem bezw. zu zweien, so müfste jedes weitere beide enthaltende Fundamentaltripel ein einem der ersten vier Punkte zukommendes Fundamentaltripel darstellen, was der Voraussetzung widerspricht.

Im Falle (γ) dagegen gehören die drei Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3$$

zu je drei, die drei anderen

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_5, \quad \mathfrak{p}_6$$

aber zu je zwei Fundamentaltripeln. Es wird daher das Tripel $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$ selbst als neues und letztes Fundamentaltripel resultieren.

Man erkennt, dafs in diesem Falle $(I_2 a_\gamma)$ die vier Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_5$$

mit allen fünf anderen, die Punkte

$$\mathfrak{p}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_6$$

aber mit nur je vier anderen durch genau drei Fundamentaltripel verknüpft sind, und zwar gemäfs dem folgenden Schema:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \\
\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \\
\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \\
\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6; & \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \\
\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \\
\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4; & \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2 .
\end{array}$$

Bei der Wahl (b) beschränkt die Voraussetzung infolge der Zugehörigkeit der Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_3$ zu je drei, der Punkte $\mathfrak{p}_5$ und $\mathfrak{p}_6$ zu je zwei und der Punkte $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_4$ zu je einem Fundamentaltripel die Annahme der dritten Fundamentaltripel von

$$\mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_6$$

auf die beiden Tripel

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6 .$$

In der so resultierenden Verkettung ist jeder Punkt mit allen fünf anderen durch drei Fundamentaltripel verbunden, und zwar nach dem Schema:

$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$,
$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3$,
$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$,
$\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3$,
$\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4$,
$\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4$.

II. Es sei der Punkt $\mathfrak{p}_1$ mit den fünf anderen durch die vier Fundamentaltripel verkettet

$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_1, \ _4, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$,

so kann der Punkt $\mathfrak{p}_3$ (bezw. der ihm topologisch äquivalente Punkt $\mathfrak{p}_5$)

1) entweder gleichfalls vier Fundamentaltripeln gemein sein,
2) oder zu genau drei solchen gehören.

Da die beiden Punktetripel

$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5$

nach Früherem als Fundamentaltripel ausgeschlossen, sind die übrigen Fundamentaltripel von $\mathfrak{p}_3$ jedenfalls unter den vier Tripeln zu suchen:

$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$.

Zufolge der Annahme (II_1) hat man deshalb für die zwei unbekannten Fundamentaltripel $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y$ zunächst die Auswahl zwischen den Paaren:

a) $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$; b) $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$;
c) $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$; d) $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$;
e) $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$.

Die erste dieser fünf Annahmen ist unzulässig, da die Existenz der cyklischen Verkettung

$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2$

mit der lineal unabhängigen Lage der sechs Punkte $\mathfrak{p}_i$ nach § 7 unvereinbar ist.

Im Falle (b) gehören die Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_3$ zu je vier, die Punkte $\mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{p}_5$ zu je drei und die Punkte $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_6$ zu je zwei Fundamentaltripeln. Deshalb und weil kein Punkt in mehr als vier und in mindestens drei Fundamentaltripeln auftreten soll, bleiben zur Vervollständigung des Systemes der Fundamentaltripel allein die beiden Tripel:

$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$ und $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$.

Alsdann ist jeder Punkt mit den fünf anderen durch vier Fundamentaltripel verknüpft und zwar nach dem Schema:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \\ \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6; & \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \\ \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \\ \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; & \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; & \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1. \end{array}$$

Gemäfs der Annahme (c) gehören die drei Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_5$$

zu je vier, die drei anderen

$$\mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_6$$

zu je zwei Fundamentaltripeln. Es folgt als einziges das System ergänzendes Fundamentaltripel das Tripel

$$\mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_6.$$

Jeder Punkt ist mit allen fünf anderen verkettet, und zwar ein unpaarer Punkt durch vier, ein paarer durch drei Fundamentaltripel. Das System derselben wird dargestellt durch das Schema:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \\ \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, & \\ \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, & \\ \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1. & \end{array}$$

Im Falle (d) gehören die Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_3$ zu je vier, die Punkte $\mathfrak{p}_5$ und $\mathfrak{p}_6$ zu je drei und die Punkte $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_4$ zu je zwei Fundamentaltripeln. Das System dieser kann daher, wenn überhaupt, nur ergänzt werden durch die beiden Tripel:

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6.$$

Man findet jeden Punkt mit allen fünf anderen durch vier Fundamentaltripel und zwar auf eine der unter (b) beschriebenen ganz analoge Weise verkettet.

Bei der Annahme (e) endlich gehören die Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_3$ zu je vier, die Punkte $\mathfrak{p}_4$, $\mathfrak{p}_5$, $\mathfrak{p}_6$ zu je drei, der Punkt $\mathfrak{p}_2$ zu einem einzigen Fundamentaltripel. Da in zwei weiteren den Punkt $\mathfrak{p}_2$ ent-

haltenden Fundamentaltripeln entweder einer der beiden Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_3$ mindestens einmal oder einer der drei Punkte $\mathfrak{p}_4$, $\mathfrak{p}_5$, $\mathfrak{p}_6$ mindestens zweimal vorkommen mufs, verstöfst dieser Fall gegen die Voraussetzung.

II_2. Es wird jetzt angenommen, dafs der Punkt $\mathfrak{p}_3$ und folglich auch der ihm gleichwertige Punkt $\mathfrak{p}_5$ nur zu je drei Fundamentaltripeln gehören.

Dafs beide Punkte ein und demselben dritten Fundamentaltripel gemein sind, ist ausgeschlossen. Denn da ein solches notwendig entweder mit dem Tripel $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_5$, $\mathfrak{p}_2$ oder mit dem anderen $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_5$, $\mathfrak{p}_6$ identisch wäre, müfsten in dem einen Falle zu $\mathfrak{p}_6$, in dem anderen zu $\mathfrak{p}_2$ noch mindestens zwei Fundamentaltripel gehören, eine Forderung, deren Erfüllbarkeit die Zugehörigkeit des Punktes $\mathfrak{p}_1$ zu fünf Fundamentaltripeln bedingen würde.

Es kommen demnach für die Wahl der beiden dritten Fundamentaltripel der Punkte

$$\mathfrak{p}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_5$$

nur die beiden Paare in Frage:

a) $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6$ und $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6$, b) $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$ und $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2$.

Je nach derselben bieten sich als allein mögliche Ergänzungen des Systemes der Fundamentaltripel die beiden Tripel:

$$\text{a)}\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \qquad \text{b)}\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6.$$

Beide Fälle sind illusorisch; der erste infolge der Zugehörigkeit der Punkte $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_6$ zu denselben drei, der zweite wegen derjenigen des Punktes $\mathfrak{p}_4$ zu fünf Fundamentaltripeln.

III. Es sei der Punkt $\mathfrak{p}_1$ mit den fünf anderen Punkten durch die fünf Fundamentaltripel verknüpft

$$1)\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2.$$

Da aus leicht begreiflichen Gründen die fünf Punktetripel

$$\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2;\ \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5;\ \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$$

von dem Systeme der Fundamentaltripel ausgeschlossen sind, hat man letztere allein aus den fünf anderen auszuwählen:

$$2)\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5;\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6;\ \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2;\ \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\ \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4.$$

A priori bieten sich vier Möglichkeiten, das System (1) zu vervollständigen, indem man nämlich demselben entweder zwei oder drei oder vier oder alle fünf Tripel der Gruppe (2) adjungiert.

Den ersten Fall zu verfolgen, wähle man die Tripel

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4.$$

Alsdann ordnen sich die Fundamentaltripel der sechs Centren zu dem Schema:

$$\begin{array}{lllll} \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2; \\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4; & \\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4; & & \\ \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6; & & \\ \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6; & \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; & & \\ \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2; & \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5. & & \end{array}$$

Nach demselben resultieren die Indices der sechs Punkte $\mathfrak{p}_i$ abgesehen von dem jedesmaligen Drehungssinn in den Formen:

$$\begin{array}{ll} J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6; & J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4; \\ J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6; & J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6); \\ J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3); & J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \end{array}$$

wo in den beiden Indices

$$J(\mathfrak{p}_4) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_5)$$

durch die Symbole

$$(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)$$

die Vertauschbarkeit von resp.

$$\mathfrak{p}_2 \text{ mit } \mathfrak{p}_6 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2 \text{ mit } \mathfrak{p}_3$$

ausgedrückt werden soll.

Nach Theorem (6b) bedingen aber die Indices

$$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3$$

die beiden anderen

$$J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \ldots \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \ldots,$$

so dafs diese sich in der Form ergeben:

$$J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2.$$

Aus dem jetzt vorliegenden Indexsysteme

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ J(\mathfrak{p}_3),\ J(\mathfrak{p}_4),\ J(\mathfrak{p}_5),\ J(\mathfrak{p}_6)$$

sind unmittelbar die drei weiteren Tripel

$$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5$$

gleichfalls als Fundamentaltripel abzulesen. Also besteht der Satz:

Wenn in einem allgemeinen Punktsysteme $\mathfrak{P}_6$ ein Punkt mit den fünf übrigen durch fünf Fundamentaltripel verkettet ist, so gilt das Gleiche auch von jedem anderen Punkte, und alle sechs Punkte sind miteinander durch zehn Fundamentaltripel verknüpft.

Die Ergebnisse der bisherigen Untersuchung lassen sich folgendermafsen zusammenfassen:

Wenn in der Ebene irgend sechs lineal unabhängige Punkte gegeben vorliegen, so können die Bezeichnungen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$$

stets in der Weise auf sie verteilt werden, dafs das System der durch die sechs Punkte bestimmten Fundamentaltripel in einer der nachstehenden sechs Formen erscheint:

I′. $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$;
$\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; (I_1)

II′. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$;
$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$; $(I_{2a\gamma})$

III′. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$;
$\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3$; (I_{2b})

IV′. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$;
$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3$; (II_{1b})

V′. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$;
$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4$; (II_{1c})

VI′. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2$;
$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5$. (III)

Die Einteilung der Tripel jeder einzelnen Gruppe in die Fundamentaltripel der sechs Elemente

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$$

und ihre demgemäfse Anordnung zu ebensovielen Reihen, wie sie vorher wiederholt angegeben worden, führt den sechs verschiedenen Fällen entsprechend unmittelbar zu den folgenden Indexsystemen:

I′. $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$, $J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4$,
$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5$, $J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1$,
$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4$, $J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4$;

II′. $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, (\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6)$, $J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, (\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6)$,
$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1$, $J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3)$,
$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)$, $J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$;

III′. $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, (\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6)$, $J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3)$,
$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, (\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6)$, $J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3)$,
$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4)$, $J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4)$;

IV′. $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$, $J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1$,
$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1$, $J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1$,
$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2$, $J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5$;

V′. $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$, $J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, (\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6)$,
$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$, $J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6)$,
$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$, $J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4)$;

VI′. $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$, $J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$,
$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1$, $J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1$,
$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1$, $J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$.

Nach diesem Schema sind in den Fällen I′, IV′ und VI′ alle sechs Indices bis auf den Drehungssinn eindeutig bestimmt, wogegen in den Fällen V′, II′ und III′ resp. drei, vier und alle sechs Indices als doppeldeutig auftreten. Indessen zeigt eine nähere Diskussion der letzten drei Systeme, daſs ihre Mehrdeutigkeit nur scheinbar vorhanden, indem von den jedesmal zur Auswahl stehenden 2^λ ($\lambda = 3, 4, 6$) Annahmen in den beiden ersten Fällen nur je eine, in dem letzten Falle keine einzige den für das Indexsystem eines Punktesystemes charakteristischen Bedingungen entspricht.

Es werde an erster Stelle das System betrachtet:

V′. $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$, $J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, (\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6)$,
$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$, $J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6)$,
$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$, $J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4)$.

Die Wählbarkeit einer der acht Kombinationen

$$J(\mathfrak{p}_2), \quad J(\mathfrak{p}_4), \quad J(\mathfrak{p}_6)$$

hängt von ihrer Eigenschaft ab, den ursprünglichen Bestand an Fundamentaltripeln nicht zu vermehren. — Es bedingt aber die Koexistenz sowohl der Indices

1) $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$ und $J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$

als der anderen

$$2)\quad J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6$$

je ein neues Fundamentaltripel:

$$1)\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6; \qquad 2)\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6,$$

d. h. es bestimmen sich:

$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2.$$

Da ferner die Indices

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4$$

das Fundamentaltripel involvieren

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_6,$$

ergiebt sich der Index

$$J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2.$$

Die Fundamentaltripel des Systemes (V′) definieren somit eindeutig das Indexsystem:

$$\begin{aligned}
&J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \quad J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1,\\
&J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1,\\
&J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5,
\end{aligned}$$

ohne ein weiteres Fundamentaltripel zu bedingen.

In dem Falle des Systemes

$$\begin{aligned}
\text{II}'.\ &J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3,\\
&J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, (\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6), \quad J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, (\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6),\\
&J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3), \quad J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)
\end{aligned}$$

wähle man zunächst

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6.$$

Aus diesem und dem Index

$$J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

folgt dann nach Theorem (6b) der dritte:

$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \cdots,$$

während er thatsächlich die Form hat

$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \cdots.$$

Es bleibt somit nur die Annahme

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5.$$

Zufolge derselben und des Index

$$J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$$

bestimmt sich wiederum nach (6b):

$$J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3.$$

Aus diesem Index und dem anderen

$$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \ldots$$

ergiebt sich aber nach dem gleichen Schlusse:

$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6.$$

Kombiniert man letzteren mit dem Index

$$J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \ldots,$$

so resultiert endlich:

$$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3.$$

Das Indexsystem II′ reduziert sich also auf das eindeutige Schema:

$$\begin{aligned} \text{II}'.\quad & J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \quad J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \\ & J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \\ & J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \end{aligned}$$

und dieses definiert, wie erforderlich, genau das ursprüngliche System von Fundamentaltripeln.

In Bezug auf den letzten noch fraglichen Fall des Systemes

$$\begin{aligned} \text{III}'.\quad & J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, (\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6), \quad J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, (\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6), \\ & J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3), \quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3), \\ & J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4), \quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, (\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4) \end{aligned}$$

bestimmen sich unter der Annahme

$$1)\quad J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$$

die beiden Indices:

$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4.$$

In denselben trennen aber entgegen der durch das Theorem (6b) ausgesprochenen Eigenschaft eines Indexsystemes die Elementepaare

$$1)\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6 \quad \text{und} \quad 2)\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$$

die drei übrigen Elemente

$$\mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_4, \quad \mathfrak{p}_5$$

in die verschiedenen Gruppen

$$1)\ \mathfrak{p}_3 \text{ und } \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \qquad 2)\ \mathfrak{p}_4 \text{ und } \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5.$$

Die getroffene Wahl ist daher illusorisch.

Analog findet man rücksichtlich der durch die zweite zulässige Voraussetzung

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5$$

bedingten Indices

$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2,$$

dafs resp. die Elementepaare

$$1)\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad 2)\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$$

gleichfalls entgegen dem Theoreme (6b) die Gruppen trennen:

$$1)\ \mathfrak{p}_3 \text{ und } \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \quad 2)\ \mathfrak{p}_4 \text{ und } \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6.$$

In dem Schema III′ ist mithin, wie behauptet, auch nicht ein einziges Indexsystem enthalten.

Von den ursprünglich als eindeutig bestimmten drei Indexsystemen I′, IV′ und VI′ steht noch das System

$$\begin{aligned} \text{IV}'.\ & J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \quad J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \\ & J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \\ & J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3 \end{aligned}$$

mit den Forderungen des Theoremes (6) im Widerspruch. — Denn obwohl der Index

$$J(\mathfrak{p}_1)$$

die Nachbarelemente aufweist

$$\mathfrak{p}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_6,$$

trennen in deren Indices

$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3$$

resp. die Paare

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$$

die verschiedenen Gruppen

$$1)\ \mathfrak{p}_4 \text{ und } \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \quad 2)\ \mathfrak{p}_5 \text{ und } \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4.$$

Die bisherigen Untersuchungen zeigen, dafs die aus sechs Elementen $\mathfrak{p}_i$ gebildeten Kombinationen von Tripeln

$$\text{I}', \ \text{II}', \ \text{V}', \ \text{VI}'$$

die typischen Formen aller Systeme von Fundamentaltripeln umfassen, welche sechs in der Ebene veränderliche Punkte bei lineal unabhängiger Lage erzeugen können, sowie dafs eine jede dieser Kombinationen die Indices der sechs Elemente $\mathfrak{p}_i$ bis auf den Drehungssinn eindeutig definiert. Es bleibt deshalb mit Rücksicht auf die ursprüngliche Frage, inwieweit das als vollständig beschrieben vorausgesetzte System der Fundamentaltripel einer Punktgruppe $\mathfrak{P}_6$

deren Charakter fixiert, noch zu entscheiden, ob die weitere Angabe der Charakteristiken der Tripel einer Kombination notwendig und auch hinreichend ist, die Zweideutigkeit der sechs Indices rücksichtlich ihres Drehungssinnes zu beseitigen.

Die Entscheidung der Frage beruht in dem doppelten Nachweise:

1) dafs in jedem der zu diskutierenden vier Systeme von Fundamentaltripeln aus der Kenntnis des Hauptpunktes eines dieser der Drehungssinn eines jeden Index gefolgert werden kann,

2) dafs das System der Hauptpunkte durch die gemachten Voraussetzungen im allgemeinen nicht eindeutig definiert ist.

Behufs des ersten Nachweises bemerke man zunächst, dafs zwischen den Fundamentaltripeln eines der fraglichen vier Systeme stets eine Verkettung der Form existiert:

$$1)\quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l;\quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m;\quad \mathfrak{p}_\iota, \mathfrak{p}_\varkappa, \mathfrak{p}_r;\quad \mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{p}_\mu, \mathfrak{p}_t,$$

wenn die Elemente des Systemes bezeichnet sind durch

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_m,\ \mathfrak{p}_r,\ \mathfrak{p}_t,$$

und die 2 . 2 Elemente

$$\mathfrak{p}_\iota, \mathfrak{p}_\varkappa \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{p}_\mu$$

resp. den Gruppen angehören

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_r.$$

Es folgt dies nämlich daraus, dafs von drei Fundamentaltripeln eines Punktes $\mathfrak{p}_i$ mindestens zwei,

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m,$$

noch ein zweites Element $\mathfrak{p}_k$ gemein haben. Weil dann aber die vier Punkte

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_m$$

ein drittes Fundamentaltripel nicht bestimmen und die beiden übrigen Elemente

$$\mathfrak{p}_r \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_t$$

höchstens zwei Fundamentaltripeln gemein sein können, mufs ein fünftes Fundamentaltripel den Punkt $\mathfrak{p}_r$ und zwei Punkte $\mathfrak{p}_l$, $\mathfrak{p}_k$ und folglich jedes Fundamentaltripel von $\mathfrak{p}_t$ zwei Punkte $\mathfrak{p}_\lambda$, $\mathfrak{p}_\mu$ enthalten. Q. e. d.

Stellt jetzt $\mathfrak{p}_i$ den Hauptpunkt des Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

dar, so werden dadurch und durch die Charakteristik des letzteren die drei Indices

$$J(\mathfrak{p}_i),\ J(\mathfrak{p}_k),\ J(\mathfrak{p}_l)$$

ihrem Drehungssinne nach bestimmt, und zwar:

a) bei positiver Folge $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}_l$ durch:

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_k, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \ldots;$$

b) bei negativer Folge $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}_l$ durch:

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_l, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \ldots.$$

Weil aber durch die Indices

$$1)\ 'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_k, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_i, \ldots;$$
$$2)\ 'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_k, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_x, \ldots;$$
$$3)\ 'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_x, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_i, \ldots;$$
$$4)\ 'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_x, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_x, \ldots$$

zweier Elemente $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$ eines Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_x$$

und durch dessen Charakteristik

$$a)\ c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_x) = +1, \quad b)\ c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_x) = -1$$

auch stets der Index des dritten Elementes $\mathfrak{p}_x$ fixiert ist, nämlich:

$$a_{1,4})\ b_{2,3})\ 'J(\mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k, \ldots,$$
$$a_{2,3})\ b_{1,4})\ 'J(\mathfrak{p}_x) = \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_i, \ldots,$$

ergiebt sich in der obigen Verkettung aus den Indices $'J(\mathfrak{p}_i)$ und $'J(\mathfrak{p}_k)$ und der Charakteristik des Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}_m$ weiter der Index $'J(\mathfrak{p}_m)$, darauf aus den Indices $'J(\mathfrak{p}_t)$ und $'J(\mathfrak{p}_\nu)$ und der Charakteristik des Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_r$, $\mathfrak{p}_t$, $\mathfrak{p}_\nu$ der Index $'J(\mathfrak{p}_r)$, schliefslich aus den Indices $'J(\mathfrak{p}_\lambda)$, $'J(\mathfrak{p}_\mu)$ und der Charakteristik des Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_t$, $\mathfrak{p}_\lambda$, $\mathfrak{p}_\mu$ der Index $'J(\mathfrak{p}_t)$. — Q. e. d.

Bezüglich der Systeme I′, II′ und VI′ erkennt man leicht, dafs innerhalb eines jeden zu irgend einem Fundamentaltripel allemal ein zweites vorhanden, welches zwei Elemente des ersteren enthält, so dafs die Kenntnis des Hauptpunktes eines ganz beliebigen Fundamentaltripels genügt, auch den Drehungssinn des einzelnen Index festzustellen. Dagegen ist in dem Systeme

$$V'.\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6;$$
$$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2;\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6;\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4$$

das Fundamentaltripel $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_4$, $\mathfrak{p}_6$ mit keinem anderen doppelt verknüpft, und deshalb die alleinige Kenntnis seines Hauptpunktes zur vollständigen Fixierung des Indexsystemes nicht hinreichend.

Angenommen, es existierte unter Bezug auf die zweite obige Behauptung für eines der vier Systeme von Fundamentaltripeln bei entsprechend gewählten Charakteristiken letzterer ein dasselbe veranschaulichendes Punktesystem

$$\mathfrak{P}_6 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6,$$

welchem in zwei verschiedenen Lagen rücksichtlich des nämlichen Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}_l$ verschiedene Hauptpunkte zugehören, so hat man gemäfs den vier möglichen primären Strahlenbereichen

$$1)\ \mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l; \quad 2)\ \mathfrak{p}_k|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l; \quad 3)\ \mathfrak{p}_l|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k; \quad 4)\ \mathfrak{p}_\infty|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$$

bei positiver Punktefolge $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}_l$ die Indicesreihen:

$$1)\ 'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_k^1) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \ldots;$$
$$2)\ 'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \ldots;$$
$$3)\ 'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \ldots;$$
$$4)\ 'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \ldots; \quad 'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \ldots.$$

Ein Vergleich derselben lehrt die allgemeine Regel, dafs in einem Fundamentaltripel von konstanter Charakteristik bei jedem Wechsel des Hauptpunktes die Indices zweier Elemente den Drehungssinn ändern, nämlich sowohl bei Vertauschung zweier Primärbereiche

$$\mathfrak{p}_k|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_l|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$$

wie bei dem Wechsel der anderen

$$\mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_\infty|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$$

die Indices der Elemente

$$\mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_l.$$

Man schliefst hieraus unmittelbar weiter:

Wenn bei konstanter Charakteristik eines Fundamentaltripels der Index eines Elementes den Drehungssinn wechselt, so gilt das notwendig auch bezüglich des Index eines zweiten Elementes.

Um die Übersicht der nachfolgenden Untersuchung zu erleichtern, unterscheide man etwaige vier den Annahmen

$$\mathfrak{p}_i|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l; \quad \mathfrak{p}_k|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l; \quad \mathfrak{p}_l|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k; \quad \mathfrak{p}_\infty|\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$$

entsprechende Lagen des darstellenden Punktesystemes $\mathfrak{P}_6$ durch die respektiven Bezeichnungen

$$\mathfrak{P}_6^{(i)}, \quad \mathfrak{P}_6^{(k)}, \quad \mathfrak{P}_6^{(l)}, \quad \mathfrak{P}_6^{(0)},$$

die Indices der jedesmal zugehörigen Elemente aber durch:

$$'J_h(\mathfrak{p}_1),\ \ 'J_h(\mathfrak{p}_2),\ \ \ldots,\ \ 'J_h(\mathfrak{p}_6),$$
$$(h = i,\ k,\ l,\ 0).$$

Ferner werde die Übereinstimmung bezw. der Gegensatz der Indices entsprechender Elemente rücksichtlich ihres Drehungssinnes durch die symbolischen Gleichungen ausgedrückt:

$$J_{h_1}(\mathfrak{p}_x) = J_{h_2}(\mathfrak{p}_x) \quad \text{und} \quad J_{h_1}(\mathfrak{p}_x) \neq J_{h_2}(\mathfrak{p}_x).$$

Nach diesen allgemeinen Festsetzungen findet man unter der Annahme zweier zu demselben Systeme von Fundamentaltripeln

I′. $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$

und der nämlichen Reihe von Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1), \ldots, c(\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3),$$

aber zu verschiedenen Hauptpunkten

$$\mathfrak{p}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2$$

des Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_1$$

gehörigen Punktegruppen

$$\mathfrak{P}_6' \equiv \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_6'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \ldots, \mathfrak{p}_6''$$

zwischen den beiderseitigen Indexsystemen die Beziehungen:

1) $c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1) = \pm 1$; $\underline{J_1(\mathfrak{p}_1) \neq J_2(\mathfrak{p}_1),\ J_1(\mathfrak{p}_2) \neq J_2(\mathfrak{p}_2),}$
$J_1(\mathfrak{p}_3) = J_2(\mathfrak{p}_3)$;

$c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4) = \pm 1$; $\underline{J_1(\mathfrak{p}_1) \neq J_2(\mathfrak{p}_1),\ J_1(\mathfrak{p}_3) = J_2(\mathfrak{p}_3),}$
$J_1(\mathfrak{p}_4) \neq J_2(\mathfrak{p}_4)$;

$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5) = \pm 1$; $\underline{J_1(\mathfrak{p}_1) \neq J_2(\mathfrak{p}_1),\ J_1(\mathfrak{p}_4) \neq J_2(\mathfrak{p}_4),}$
$J_1(\mathfrak{p}_5) = J_2(\mathfrak{p}_5)$;

$c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6) = \pm 1$; $\underline{J_1(\mathfrak{p}_4) \neq J_2(\mathfrak{p}_4),\ J_1(\mathfrak{p}_5) = J_2(\mathfrak{p}_5),}$
$J_1(\mathfrak{p}_6) \neq J_2(\mathfrak{p}_6)$.

Da die vorläufig als möglich annehmbaren vier Punktegruppen

$$\mathfrak{P}_6', \quad \mathfrak{P}_6'', \quad \mathfrak{P}_6''', \quad \mathfrak{P}_6^{(0)}$$

in je zwei getrennten Paaren

$$\mathfrak{P}_6^{(i)}, \ \mathfrak{P}_6^{(k)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_6^{(l)}, \ \mathfrak{P}_6^{(m)}$$

bezüglich der drei Elemente

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}_3$$

die gleichen Relationen involvieren:

$$J_i(\mathfrak{p}_h) = J_k(\mathfrak{p}_h) \quad \text{und} \quad J_i(\mathfrak{p}_h) = J_m(\mathfrak{p}_h)$$

oder

$$J_i(\mathfrak{p}_h) \neq J_k(\mathfrak{p}_h) \quad \text{und} \quad J_l(\mathfrak{p}_h) \neq J_m(\mathfrak{p}_h),$$

liefert der Vergleich der Gruppen

(2) $\mathfrak{P}_6'$ und $\mathfrak{P}_6'''$ bezw. (5) $\mathfrak{P}_6''$ und $\mathfrak{P}_6^{(0)}$

und

(3) $\mathfrak{P}_6'$ und $\mathfrak{P}_6^{(0)}$ bezw. (4) $\mathfrak{P}_6''$ und $\mathfrak{P}_6'''$

auf ganz analoge Weise wie vorher der Vergleich von

(1) $\mathfrak{P}_6'$ und $\mathfrak{P}_6''$ bezw. (6) $\mathfrak{P}_6'''$ und $\mathfrak{P}_6^{(0)}$

die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
2)\,5)\quad & J_1(\mathfrak{p}_1) \neq J_3(\mathfrak{p}_1), \quad J_1(\mathfrak{p}_3) \neq J_3(\mathfrak{p}_3),\\
& J_1(\mathfrak{p}_2) = J_3(\mathfrak{p}_2), \quad J_1(\mathfrak{p}_4) = J_3(\mathfrak{p}_4),\\
& J_1(\mathfrak{p}_5) \neq J_3(\mathfrak{p}_5), \quad J_1(\mathfrak{p}_6) \neq J_3(\mathfrak{p}_6),\\
3)\,4)\quad & J_1(\mathfrak{p}_2) \neq J_0(\mathfrak{p}_2), \quad J_1(\mathfrak{p}_3) \neq J_0(\mathfrak{p}_3),\\
& J_1(\mathfrak{p}_1) = J_0(\mathfrak{p}_1), \quad J_1(\mathfrak{p}_4) \neq J_0(\mathfrak{p}_4),\\
& J_1(\mathfrak{p}_5) \neq J_0(\mathfrak{p}_5), \quad J_1(\mathfrak{p}_6) = J_0(\mathfrak{p}_6).
\end{aligned}$$

In Verbindung mit einem früheren Satze zeigt diese Tabelle, dafs mit den Charakteristiken der Fundamentaltripel von (I′) das System der Hauptpunkte vierdeutig bestimmt ist, ohne dafs dadurch ein Widerspruch mit den Voraussetzungen eintritt.

Für das zweite System ihren Charakteristiken nach bestimmter Fundamentaltripel

$$\text{II}'.\quad \begin{aligned}
&\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3;\\
&\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5
\end{aligned}$$

ergiebt der paarweise Vergleich der vier zugehörigen Systeme

$$\mathfrak{P}_6', \quad \mathfrak{P}_6'', \quad \mathfrak{P}_6''', \quad \mathfrak{P}_6^{(0)}$$

die Beziehungen:

$$1)\,6)\quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = \pm 1; \quad \frac{J_1(\mathfrak{p}_1) \neq J_2(\mathfrak{p}_1),\ J_1(\mathfrak{p}_2) \neq J_2(\mathfrak{p}_2),}{J_1(\mathfrak{p}_3) = J_2(\mathfrak{p}_3);}$$

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = \pm 1; \quad \frac{J_1(\mathfrak{p}_1) \neq J_2(\mathfrak{p}_1),\ J_1(\mathfrak{p}_3) = J_2(\mathfrak{p}_3),}{J_1(\mathfrak{p}_4) \neq J_2(\mathfrak{p}_4);}$$

$$c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3) = \pm 1; \quad \frac{J_1(\mathfrak{p}_2) \neq J_2(\mathfrak{p}_2),\ J_1(\mathfrak{p}_3) = J_2(\mathfrak{p}_3),}{J_1(\mathfrak{p}_5) \neq J_2(\mathfrak{p}_5);}$$

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6) = \pm 1; \quad \frac{J_1(\mathfrak{p}_1) \neq J_2(\mathfrak{p}_1),\ J_1(\mathfrak{p}_5) \neq J_2(\mathfrak{p}_5),}{J_1(\mathfrak{p}_6) = J_2(\mathfrak{p}_6);}$$

2) 5) $$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = \pm 1, \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = \pm 1;$$

$$c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2) = \pm 1; \quad \begin{matrix} J_1(\mathfrak{p}_1) \neq J_3(\mathfrak{p}_1),\ J_1(\mathfrak{p}_3) \neq J_3(\mathfrak{p}_3), \\ J_1(\mathfrak{p}_2) = J_3(\mathfrak{p}_2),\ J_1(\mathfrak{p}_4) = J_3(\mathfrak{p}_4), \\ J_1(\mathfrak{p}_6) = J_3(\mathfrak{p}_6); \end{matrix}$$

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6) = \pm 1; \quad \begin{matrix} J_1(\mathfrak{p}_1) \neq J_3(\mathfrak{p}_1),\ J_1(\mathfrak{p}_6) = J_3(\mathfrak{p}_6), \\ J_1(\mathfrak{p}_5) \neq J_3(\mathfrak{p}_5); \end{matrix}$$

$$c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5) = \pm 1; \quad \begin{matrix} J_1(\mathfrak{p}_4) = J_3(\mathfrak{p}_4),\ J_1(\mathfrak{p}_6) = J_3(\mathfrak{p}_6), \\ J_1(\mathfrak{p}_5) = J_3(\mathfrak{p}_5); \end{matrix}$$

3) 4) $$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = \pm 1, \quad c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3) = \pm 1;$$

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6) = \pm 1; \quad \begin{matrix} J_1(\mathfrak{p}_2) \neq J_0(\mathfrak{p}_2),\ J_1(\mathfrak{p}_3) \neq J_0(\mathfrak{p}_3), \\ J_1(\mathfrak{p}_1) = J_0(\mathfrak{p}_1),\ J_1(\mathfrak{p}_5) = J_0(\mathfrak{p}_5), \\ J_1(\mathfrak{p}_6) = J_0(\mathfrak{p}_6); \end{matrix}$$

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = \pm 1: \quad \begin{matrix} J_1(\mathfrak{p}_1) = J_0(\mathfrak{p}_1),\ J_1(\mathfrak{p}_3) \neq J_0(\mathfrak{p}_3), \\ J_1(\mathfrak{p}_4) \neq J_0(\mathfrak{p}_4); \end{matrix}$$

$$c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5) = \pm 1; \quad \begin{matrix} J_1(\mathfrak{p}_4) \neq J_0(\mathfrak{p}_4),\ J_1(\mathfrak{p}_6) = J_0(\mathfrak{p}_6), \\ J_1(\mathfrak{p}_5) \neq J_0(\mathfrak{p}_5). \end{matrix}$$

Hier lehren die unter den Annahmen (2), (3), (4), (5) resultierenden Widersprüche mit der Voraussetzung, dafs das vorliegende System von Fundamentaltripeln, wenn überhaupt,

1) entweder nur durch zwei Punktegruppen

$$\mathfrak{P}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_6'',$$

2) oder nur durch zwei andere

$$\mathfrak{P}_6''' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_6^{(0)}$$

geometrisch realisiert werden kann, dafs mithin die Gruppe der zu ihm gehörigen Hauptpunkte höchstens zweideutig definiert ist.

Die bei konstanten Charakteristiken der Fundamentaltripel eines Systemes

$$\text{V}'. \quad \begin{matrix} \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6; \\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2; & \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6; & \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4 \end{matrix}$$

involvierten Beziehungen zwischen den Indexsystemen der respektiven vier Gruppen

$$\mathfrak{P}_6', \quad \mathfrak{P}_6'', \quad \mathfrak{P}_6''', \quad \mathfrak{P}_6^{(0)}$$

bestimmen sich unter bezug auf die ersten vier Tripel der Reihe (V′) successive durch:

$$\begin{aligned}
1)\,6)\quad & J_1(\mathfrak{p}_1) \neq J_2(\mathfrak{p}_1), \quad J_1(\mathfrak{p}_2) \neq J_2(\mathfrak{p}_2), \\
& J_1(\mathfrak{p}_3) = J_2(\mathfrak{p}_3), \quad J_1(\mathfrak{p}_4) \neq J_2(\mathfrak{p}_4), \\
& J_1(\mathfrak{p}_5) = J_2(\mathfrak{p}_5), \quad J_1(\mathfrak{p}_6) \neq J_2(\mathfrak{p}_6), \\
2)\,5)\quad & J_1(\mathfrak{p}_1) \neq J_3(\mathfrak{p}_1), \quad J_1(\mathfrak{p}_3) \neq J_3(\mathfrak{p}_3), \\
& J_1(\mathfrak{p}_2) = J_3(\mathfrak{p}_2), \quad J_1(\mathfrak{p}_4) = J_3(\mathfrak{p}_4), \\
& J_1(\mathfrak{p}_5) \neq J_3(\mathfrak{p}_5), \quad J_1(\mathfrak{p}_6) = J_3(\mathfrak{p}_6); \\
3)\,4)\quad & J_1(\mathfrak{p}_1) = J_0(\mathfrak{p}_1), \quad J_1(\mathfrak{p}_2) \neq J_0(\mathfrak{p}_2), \\
& J_1(\mathfrak{p}_3) \neq J_0(\mathfrak{p}_3), \quad J_1(\mathfrak{p}_4) \neq J_0(\mathfrak{p}_4), \\
& J_1(\mathfrak{p}_5) \neq J_0(\mathfrak{p}_5), \quad J_1(\mathfrak{p}_6) \neq J_0(\mathfrak{p}_6).
\end{aligned}$$

Aus den hiernach für das fünfte Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_3, \quad \mathfrak{p}_5, \quad \mathfrak{p}_2$$

gültigen Gleichungen

$$\begin{aligned}
1)\,6)\quad & J_1(\mathfrak{p}_2) \neq J_2(\mathfrak{p}_2), \quad J_1(\mathfrak{p}_3) = J_2(\mathfrak{p}_3), \\
2)\,5)\quad & J_1(\mathfrak{p}_3) \neq J_3(\mathfrak{p}_3), \quad J_1(\mathfrak{p}_2) = J_3(\mathfrak{p}_2), \\
3)\,4)\quad & J_1(\mathfrak{p}_2) \neq J_0(\mathfrak{p}_2), \quad J_1(\mathfrak{p}_3) \neq J_0(\mathfrak{p}_3)
\end{aligned}$$

folgt aber weiter:

$$1)\,6)\ J_1(\mathfrak{p}_5) \neq J_2(\mathfrak{p}_5), \quad 2)\,5)\ J_1(\mathfrak{p}_5) \neq J_3(\mathfrak{p}_5), \quad 3)\,4)\ J_1(\mathfrak{p}_5) = J_0(\mathfrak{p}_5),$$

so dafs nur in den Fällen 2) 5) die Konsequenzen einen Widerspruch nicht aufweisen.

Es kann also die durch das System (V′) dargestellte Verkettung von Fundamentaltripeln bei konstanten Charakteristiken letzterer, wenn überhaupt,

a) entweder nur durch zwei Punktegruppen

$$\mathfrak{P}_6' \text{ und } \mathfrak{P}_6''',$$

b) oder nur durch zwei andere

$$\mathfrak{P}_6'' \text{ und } \mathfrak{P}_6^{(0)}$$

in der Ebene dargestellt werden, d. h. die Reihe der zugehörigen Hauptpunkte ist höchstens zweideutig definiert.

Endlich findet man unter bezug auf das System

VI′. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2$;
$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$

zwischen den entsprechenden Indices in je zwei zugehörigen Punktegruppen

$$\mathfrak{P}_6', \quad \mathfrak{P}_6^{(\alpha)}$$

unter bezug auf die ersten vier Tripel des Systemes successive die Relationen:

$$\begin{aligned}
1)\,6)\quad & J_1(\mathfrak{p}_1) \neq J_2(\mathfrak{p}_1), \quad J_1(\mathfrak{p}_2) \neq J_2(\mathfrak{p}_2),\\
& J_1(\mathfrak{p}_3) = J_2(\mathfrak{p}_3), \quad J_1(\mathfrak{p}_4) \neq J_2(\mathfrak{p}_4),\\
& J_1(\mathfrak{p}_5) = J_2(\mathfrak{p}_5), \quad J_1(\mathfrak{p}_6) \neq J_2(\mathfrak{p}_6);\\
2)\,5)\quad & J_1(\mathfrak{p}_1) \neq J_3(\mathfrak{p}_1), \quad J_1(\mathfrak{p}_3) \neq J_3(\mathfrak{p}_3),\\
& J_1(\mathfrak{p}_2) = J_3(\mathfrak{p}_2), \quad J_1(\mathfrak{p}_4) = J_3(\mathfrak{p}_4),\\
& J_1(\mathfrak{p}_5) \neq J_3(\mathfrak{p}_5), \quad J_1(\mathfrak{p}_6) = J_3(\mathfrak{p}_6);\\
3)\,4)\quad & J_1(\mathfrak{p}_1) = J_0(\mathfrak{p}_1), \quad J_1(\mathfrak{p}_2) \neq J_0(\mathfrak{p}_2),\\
& J_1(\mathfrak{p}_3) \neq J_0(\mathfrak{p}_3), \quad J_1(\mathfrak{p}_4) \neq J_0(\mathfrak{p}_4),\\
& J_1(\mathfrak{p}_5) \neq J_0(\mathfrak{p}_5), \quad J_1(\mathfrak{p}_6) \neq J_0(\mathfrak{p}_6).
\end{aligned}$$

Aus denselben folgen aber unter bezug auf das fünfte Tripel

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_6,\ \mathfrak{p}_2$$

in den vier ersten Fällen entgegen den respektiven Voraussetzungen die anderen Relationen:

$$1)\,6)\ J_1(\mathfrak{p}_2) = J_2(\mathfrak{p}_2), \quad 2)\,5)\ J_1(\mathfrak{p}_2) \neq J_3(\mathfrak{p}_2),$$

und nur in den beiden letzten, wie vorher:

$$3)\,4)\ J_1(\mathfrak{p}_2) \neq J_0(\mathfrak{p}_2).$$

Die Tabelle zeigt, dafs mit den Charakteristiken der Fundamendaltripel von (VI′) die Gruppe der Hauptpunkte und mit ihr die Indices der sechs Elemente, wenn überhaupt, höchstens zweideutig definiert sind.

Zusammengefafst ergeben die Resultate der einzelnen Untersuchungen den Satz:

Wenn in irgend einem allgemeinen Punktsysteme $\mathfrak{P}_6$ alle primären Punktetripel und deren Charakteristiken bekannt sind, so kann hieraus in dem Falle, wo die Fundamentaltripel des Systemes in einer Anordnung (I′) auftreten, die Gruppe der Hauptpunkte und mit ihr das System der zugehörigen Indices vierdeutig abgeleitet werden, während in den Fällen, wo die Fundamentaltripel ein System (II′), (V′) oder (VI′) konstituieren, die Verteilung der Hauptpunkte zunächst noch auf je zwei Arten als möglich erscheint.

Hiernach bleiben für die vollständige Erledigung des ursprünglichen Problemes noch folgende Fragen zu erledigen:

1) Für welche unter den bekannten vier Verknüpfungen

von Fundamentaltripeln existieren solche Kombinationen von Charakteristiken, dafs sie durch entsprechende Punktesysteme veranschaulicht werden können?

2) In welchen Beziehungen stehen bei einem solchen Systeme von Fundamentaltripeln die verschiedenen Reihen von Charakteristiken, die es geometrisch realisierbar machen?

3) Giebt es speziell Charakteristikenreihen, welche durch Punktegruppen mit verschiedenen Hauptpunktsystemen dargestellt werden?

Infolge der früher erkannten eindeutigen Abhängigkeit der Charakteristiken der Fundamentaltripel eines Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ von den Indices seiner n Elemente kann man die gestellten Fragen auch so fassen:

1) Welche unter den 2^6 möglichen Annahmen für eines der vier Indexsysteme I′, II′, V′, VI′ definieren ein allgemeines Punktesystem $\mathfrak{P}_6$?

2) Wie hängen alle zu einem und demselben Systeme gehörigen geometrisch deutigen Annahmen zusammen?

3) Giebt es im besonderen zu einzelnen der vier Hauptsysteme I′, II′, V′, VI′ verschiedene eigentliche Indicesreihen, welche Punktsysteme mit charakteristisch gleichen Fundamentaltripeln bestimmen?

Da die Beantwortung der ersten und dritten Frage es notwendig macht, jedes der vier Systeme getrennt zu behandeln, die zweite Frage dagegen eine gemeinsame Betrachtung aller vier Systeme zuläfst, soll hier diese an erster Stelle entschieden werden.

Es gilt mit Beziehung darauf der Satz:

Wenn in zwei entsprechenden Punktesystemen

$$\mathfrak{P}_6' \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_6'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \ldots, \mathfrak{p}_6''$$

m Paare entsprechender Elemente entsprechende Indices haben,

$$J(\mathfrak{p}_h') = J(\mathfrak{p}_h''),$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m)$$

und wenn die übrigen $6 - m$ Paare bezüglich der zugehörigen Indices nur in deren Drehungssinne abweichen,

$$J(\mathfrak{p}_i') \neq J(\mathfrak{p}_i''),$$

so existieren in den Ebenen der beiden Punktesysteme allemal zwei solche Geraden

$$g' \quad \text{und} \quad g'',$$

welche dieselben resp. in die Gruppen teilen:

$$\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_m' | \mathfrak{p}_{m+1}', \ldots, \mathfrak{p}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1'', \ldots, \mathfrak{p}_m'' | \mathfrak{p}_{m+1}'', \ldots, \mathfrak{p}_6''.$$

Es genügt, den Beweis für die Fälle $m = 6, 5, 4, 3$ zu geben, da zufolge der doppelten Bildfläche einer Ebene die Annahmen

$$m = 0, 1, 2$$

resp. mit den anderen

$$m = 6, 5, 4$$

als gleichwertig erscheinen.

Unter der ersten Annahme $m = 6$ lehrt der Augenschein unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung.

Rücksichtlich der drei anderen Fälle folgert man zunächst den Hülfssatz:

Wenn zwei allgemeine Punktetripel

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i'', \mathfrak{p}_k'', \mathfrak{p}_l''$$

in den Indices entsprechender Elemente übereinstimmen,

$$J(\mathfrak{p}_x') = J(\mathfrak{p}_x''),$$

und wenn zwei weitere Punkte

$$\mathfrak{p}_r' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_r''$$

entgegengesetzte Indices besitzen,

$$J(\mathfrak{p}_r') \neq J(\mathfrak{p}_r''),$$

so schliefsen die durch die Tripel bestimmten endlichen Dreiecksflächen

$$\triangle(\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l') \quad \text{und} \quad \triangle(\mathfrak{p}_i'', \mathfrak{p}_k'', \mathfrak{p}_l'')$$

die beiden vierten Punkte aus.

In der That gelten unter der gegenteiligen Annahme des einen Punktes

$$\mathfrak{p}_r'$$

innerhalb der endlichen Fläche

$$\triangle(\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l')$$

für jede der drei verschiedenen Lagen des anderen Punktes

$$\mathfrak{p}_r''$$

a) innerhalb der Fläche

$$\triangle(\mathfrak{p}_i'', \mathfrak{p}_k'', \mathfrak{p}_l''),$$

b) in einer ihrer Seitenflächen

$$F(\mathfrak{p}_y'', \mathfrak{p}_z''),$$

c) in einer ihrer Scheitelflächen

$$F(\mathfrak{p}_x'')$$

entsprechend den beiden Möglichkeiten

$$1)\ c'_{i,k,l} = c''_{i,k,l}, \qquad 2)\ c'_{i,k,l} = -c''_{i,k,l}$$

die der Voraussetzung widerstreitenden Beziehungen:

$$1)\quad a)\ J(\mathfrak{p}_r') = J(\mathfrak{p}_r''),$$
$$b)\ c)\ J(\mathfrak{p}_y') \neq J(\mathfrak{p}_y''), \quad J(\mathfrak{p}_z') \neq J(\mathfrak{p}_z''),$$
$$2)\quad a)\ J(\mathfrak{p}_h') \neq J(\mathfrak{p}_h''), \quad (h = i, k, l),$$
$$b)\ c)\ J(\mathfrak{p}_x') \neq J(\mathfrak{p}_x'').$$

Dagegen sind bei übereinstimmenden Charakteristiken

$$c'_{i,k,l} = c''_{i,k,l}$$

und gleichzeitiger Lage der beiden Punkte

$$\mathfrak{p}_r' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_r''$$

aufserhalb der resp. Dreiecke

$$\triangle(\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l') \quad \text{und} \quad \triangle(\mathfrak{p}_i'', \mathfrak{p}_k'', \mathfrak{p}_l'')$$

in je zwei Flächen

$$F(\mathfrak{p}_x') \text{ oder } F(\mathfrak{p}_y', \mathfrak{p}_z') \quad \text{und} \quad F(\mathfrak{p}_y'', \mathfrak{p}_z'') \text{ oder } F(\mathfrak{p}_x'')$$

die Bedingungen des Satzes genau erfüllt.

Infolge dieses und des anderen Umstandes, dafs ein Wechsel der Bildfläche eines der Punktesysteme

$$\mathfrak{P}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_6''$$

die Beziehungen

$$J(\mathfrak{p}_i') = J(\mathfrak{p}_i''), \quad J(\mathfrak{p}_k') = J(\mathfrak{p}_k''), \quad J(\mathfrak{p}_l') = J(\mathfrak{p}_l''), \quad J(\mathfrak{p}_r') \neq J(\mathfrak{p}_r'')$$

in die entgegengesetzten verwandelt

$$J(\mathfrak{p}_i') \neq J(\mathfrak{p}_i''), \quad J(\mathfrak{p}_k') \neq J(\mathfrak{p}_k''), \quad J(\mathfrak{p}_l') \neq J(\mathfrak{p}_l''), \quad J(\mathfrak{p}_r') = J(\mathfrak{p}_r''),$$

müssen entsprechende Punkte der beiden Gruppen

a) bei entgegengesetzten Indices aufserhalb der durch entsprechende Punkte mit übereinstimmenden Indices,

b) bei übereinstimmenden Indices aufserhalb der durch entsprechende Punkte mit entgegengesetzten Indices

gebildeten endlichen Dreiecke liegen.

Es folgt hieraus weiter, dafs, wenn in den beiden Punktesystemen um die Punktegruppen

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_m' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \ldots, \mathfrak{p}_m''$$

zwei Fäden geschlungen und auf zwei durch gewisse Elemente bestimmte Polygone zusammengezogen werden

$$P_1' \equiv \mathfrak{p}_\iota', \mathfrak{p}_\varkappa', \ldots, \quad P_1'' \equiv \mathfrak{p}_\iota'', \mathfrak{p}_\varkappa'', \ldots,$$

die Punkte der Gruppen

$$\mathfrak{p}_{m+1}', \ldots, \mathfrak{p}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{m+1}'', \ldots, \mathfrak{p}_6''$$

aufserhalb dieser Polygone liegen, und dafs ebenso die Punkte

$$\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_m' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1'', \ldots, \mathfrak{p}_m''$$

aufserhalb der zu den Gruppen

$$\mathfrak{p}_{m+1}', \ldots, \mathfrak{p}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{m+1}'', \ldots, \mathfrak{p}_6''$$

gehörigen Polygone fallen

$$P_2' \quad \text{und} \quad P_2''.$$

Mit bezug auf den zweiten Fall $m = 5$ folgt aus der Lage der Punkte

$$\mathfrak{p}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_6''$$

aufserhalb der Polygone

$$P_1' \quad \text{und} \quad P_1''$$

unmittelbar auch die Existenz der gesuchten Primärbereiche

$$\mathfrak{p}_6' \,|\, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_m' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_6'' \,|\, \mathfrak{p}_1'', \ldots, \mathfrak{p}_m''.$$

Im dritten Falle $m = 4$ kombiniere man die Punktepaare

$$\mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6''$$

mit resp. den anderen

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2''.$$

Gesetzt dann, es schneiden sich die endlichen Strecken

$$\overline{\mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6'} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2'},$$

so fällt das Indexsystem des Punktequadrupels

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6'$$

notwendig unter eine der beiden Formen:

$$\begin{aligned}
1)\ {}'J(\mathfrak{p}_1') &= \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6', \quad {}'J(\mathfrak{p}_2') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_5', \\
{}'J(\mathfrak{p}_5') &= \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_1', \quad {}'J(\mathfrak{p}_6') = \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \\
2)\ {}'J(\mathfrak{p}_1') &= \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_5', \quad {}'J(\mathfrak{p}_2') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6', \\
{}'J(\mathfrak{p}_5') &= \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \quad {}'J(\mathfrak{p}_6') = \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_1'.
\end{aligned}$$

Dementsprechend ist das Indexsystem des Punktequadrupels

$$\mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6''$$

gegeben durch:

$$1)\quad {}'J(\mathfrak{p}_1'') = \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6'', \quad {}'J(\mathfrak{p}_2'') = \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_6'', \mathfrak{p}_5'',$$
$${}'J(\mathfrak{p}_5'') = \mathfrak{p}_6'', \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \quad {}'J(\mathfrak{p}_6'') = \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_1'';$$
$$2)\quad {}'J(\mathfrak{p}_1'') = \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_6'', \mathfrak{p}_5'', \quad {}'J(\mathfrak{p}_2'') = \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6'',$$
$${}'J(\mathfrak{p}_5'') = \mathfrak{p}_6'', \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_1'', \quad {}'J(\mathfrak{p}_6'') = \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2''.$$

Weil aber den letzten Indexsystemen nach dem Theoreme (1) in § 3 ein geometrisches Äquivalent nicht zukommt, folgt:

Der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden irgend zweier Paare

$$\mathfrak{p}_\iota', \mathfrak{p}_\varkappa' \text{ und } \mathfrak{p}_\lambda', \mathfrak{p}_\mu' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}_\iota'', \mathfrak{p}_\varkappa'' \text{ und } \mathfrak{p}_\lambda'', \mathfrak{p}_\mu''$$

aus resp. den Gruppen

$$P_1' \text{ und } P_2' \quad \text{oder} \quad P_1'' \text{ und } P_2''$$

liegt allemal aufserhalb einer der sie verbindenden endlichen Strecken.

Nunmehr bestimme man unter den Seiten der Polygone

$$P_1' \text{ und } P_1''$$

diejenigen zwei Paare

$$g_1', g_2' \text{ und } g_1'', g_2'',$$

welche von resp. den Geraden

$$|\mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6'| \text{ und } |\mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6''|$$

getroffen werden. Wenn dann die Schnittpunkte von

$$g_1' \text{ und } g_1''$$

mit resp.

$$|\mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6'| \text{ und } |\mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6''|$$

den Punkten

$$\mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6' \text{ und } \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6''$$

näher liegen als die entsprechenden Schnittpunkte der Geraden

$$g_2' \text{ und } g_2'',$$

so wird eine genügend kleine Verrückung von

$$g_1' \text{ und } g_1''$$

aus ihrer Lage zwei gesuchte Geraden ergeben.

Schneiden dagegen die Verlängerungen der Strecken

$$\overline{\mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6'} \text{ und } \overline{\mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6''}$$

überhaupt nicht die beiden Polygone

$$P_1' \text{ und } P_1'',$$

so sind sie selbst durch eine geringe Dislokation in die gewünschten Lagen zu bringen.

Die Anwendung der bisherigen Ergebnisse auf den letzten Fall $m = 3$ lehrt, dafs die endlichen Dreiecksflächen

$$\triangle(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3') \quad \text{und} \quad \triangle(\mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'')$$

resp. ganz aufserhalb der anderen liegen

$$\triangle(\mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6') \quad \text{und} \quad \triangle(\mathfrak{p}_4'', \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6'').$$

Es besitzen deshalb die Flächenpaare

$\triangle(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3')$, $\triangle(\mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6')$ und $\triangle(\mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'')$, $\triangle(\mathfrak{p}_4'', \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6'')$

je ein Paar innerer Tangenten

$$t_1', t_2' \quad \text{und} \quad t_1'', t_2'',$$

und diese bestimmen je ein partielles Büschel von gesuchten Geraden

$$g' \quad \text{und} \quad g''. \qquad \text{Q. e. d.}$$

Man denke sich jetzt in der Ebene ein allgemeines Punktesystem

$$\mathfrak{P}_6 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_6$$

durch eine Gerade g in die Gruppen zerlegt

$$\mathfrak{P}_m \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_{6-m} \equiv \mathfrak{p}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{p}_6$$

und ziehe zu dieser eine das ganze System auf der nämlichen Seite enthaltende Parallele g_1. Ferner lege man durch g und g_1 zwei parallele Ebenen E und E_1, nehme in E aufserhalb g einen Punkt o an und projeziere aus diesem das System $\mathfrak{P}_6$ auf E_1 in das andere $\mathfrak{P}_6$. Je nachdem man die eine oder die andere Seite der Ebene E_1 als Operationsfeld auffafst, erhält man in den beiden Systemen

$$\mathfrak{P}_6 \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{P}}_6$$

die Beziehungen:

$$\begin{aligned} &1)\ J(\mathfrak{p}_h) = J(\bar{\mathfrak{p}}_h) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_k) \neq J(\bar{\mathfrak{p}}_k), \\ &2)\ J(\mathfrak{p}_h) \neq J(\bar{\mathfrak{p}}_h) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_k) = J(\bar{\mathfrak{p}}_k), \\ &(h = 1, \ldots, m; \quad k = m+1, \ldots, 6). \end{aligned}$$

Man schliefst hieraus in Verbindung mit dem vorhergehenden Satze den neuen:

Wenn unter den 2^6 durch ein Schema

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), \ldots, J(\mathfrak{p}_6)$$

formal gegebenen Indexsystemen auch nur eines geometrisch realisierbar ist, so haben allemal noch weitere 31

die gleiche Eigenschaft. Dieselben bestimmen sich zusammen mit dem ersten (und zwar immer paarweise) durch die 16 verschiedenen Lagen, welche eine in der Ebene des darstellenden Punktsystemes $\mathfrak{P}_6$ veränderliche Gerade zu letzterem einnehmen kann.

Dieser Satz kürzt die Diskussion der pag. 154 formulierten Frage, wie vielen der durch die vier bekannten Verkettungen von Fundamentaltripeln involvierten Indexsystemen thatsächlich Punktgruppen entsprechen, offenbar wesentlich ab, indem er aus einem einzigen solchen alle übrigen unmittelbar abzuleiten lehrt.

Dem ersten Systeme von Fundamentaltripeln

$$\text{I}'.\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1;\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5;\ \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6;\ \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2;\ \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$$

entsprach das Schema:

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6,\quad J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5,$$
$$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1,\quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1,$$
$$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4,\quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4.$$

Man findet als Repräsentanten der Kombination

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3,\quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1,$$
$$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4,\quad 'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5,$$
$$'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6,\quad 'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2$$

ein einfaches konvexes Sechseck

$$\text{I}'.\ \mathfrak{P}_6,$$

dessen Ecken bei positivem Umlaufe und beliebigem Anfangselemente bezeichnet werden durch:

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3.$$

Zu der zweiten Reihe von Fundamentaltripeln

$$\text{II}'.\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;\ \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6;\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5;\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6;\ \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$$

gehörte das Schema:

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3,\quad J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1,$$
$$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6,\quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6,$$
$$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4,\quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5.$$

Ersetzt man in demselben allgemein den doppeldeutigen Index $J(\mathfrak{p}_h)$ durch den bestimmten $'J(\mathfrak{p}_h)$, so gelangt man zu einem die entstehende Kombination darstellenden Punktesysteme

$$\text{II. } \mathfrak{P}_6',$$

wenn man unter der Annahme eines einfachen konvexen Fünfeckes mit der positiven Eckenfolge

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5$$

den Punkt

$$\mathfrak{p}_6$$

in die durch die Geraden

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5|, \quad |\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4|, \quad |\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2|$$

bestimmte endliche Dreiecksfläche verlegt.

Die Fundamentaltripel der Anordnung

$$\text{V}'. \quad \begin{array}{l} \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6; \\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4 \end{array}$$

bedingten das Schema:

$$\begin{array}{ll} J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, & J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \\ J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, & J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \\ J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, & J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5. \end{array}$$

Um ein der allgemeinen Annahme

$$J(\mathfrak{p}_h) = 'J(\mathfrak{p}_h)$$

zugeordnetes Punktesystem

$$\text{III. } \mathfrak{P}_6$$

zu erhalten, konstruiere man zunächst ein konvexes Fünfeck mit der positiven Eckenfolge

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$$

und wähle innerhalb der von den Geraden

$$|\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1|, \quad |\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5|, \quad |\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2|$$

eingeschlossenen endlichen Dreiecksfläche irgend einen Punkt zum Punkte

$$\mathfrak{p}_4.$$

Endlich findet man unter Bezug auf das dem Systeme der Fundamentaltripel

$$\text{VI}'. \quad \begin{array}{l} \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2; \\ \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4 \end{array}$$

zugehörige Schema:

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \quad J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1,$$
$$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1,$$
$$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$$

als das dem eindeutigen Indexsysteme

$$J(\mathfrak{p}_h) = {}'J(\mathfrak{p}_h)$$

entsprechende geometrische Äquivalent ein Punktesystem

$$\text{IV. } \mathfrak{P}_6,$$

gebildet aus den aufeinanderfolgenden Ecken

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$$

eines in positivem Sinne umschriebenen konvexen Fünfeckes und aus einem Punkte

$$\mathfrak{p}_1$$

innerhalb der von den fünf Diagonalen des Fünfeckes eingeschlossenen endlichen Primärfläche.

Aus den vier betrachteten Indexsystemen bezw. den sie darstellenden Punktesystemen ergeben sich für die zu Grunde liegenden vier Reihen von Fundamentaltripeln

1) als deren Charakteristiken:

I. $c_{2,3,1} = c_{3,1,4} = c_{1,4,5} = c_{4,5,6} = c_{5,6,2} = c_{6,2,3} = +1$;

II. $c_{1,1,3} = c_{1,3,2} = c_{3,2,5} = +1$, $c_{2,4,6} = -1$, $c_{4,6,5} = +1$, $c_{6,5,1} = -1$;

III. $c_{1,2,3} = c_{2,3,5} = c_{3,5,6} = c_{5,6,1} = +1$,
$c_{4,3,1} = c_{4,1,5} = c_{4,6,2} = -1$;

IV. $c_{1,2,3} = c_{1,3,4} = c_{1,4,5} = c_{1,5,6} = c_{1,6,2} = -1$,
$c_{2,4,6} = c_{4,6,3} = c_{6,5,5} = c_{3,5,2} = c_{5,2,4} = +1$;

2) als zugehörige Hauptpunkte:

I. $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2$;

II. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_6$;

III. $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6,$
$\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_4$;

IV. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1,$
$\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2$.

Bezüglich der Fälle (III) und (IV) ist bereits bekannt, dafs zwischen den Systemen der Indices und denjenigen der Charakteri-

stiken der Fundamentaltripel eine eindeutig umkehrbare Abhängigkeit besteht. Man wird deshalb in jedem solchen Falle aus einer zulässigen Reihe von Charakteristiken alle möglichen anderen dadurch finden, dafs man in dem entsprechenden Punktesysteme die verschiedenen Lagen einer veränderlichen Geraden feststellt und in dem einzelnen Falle die Charakteristiken derjenigen Fundamentaltripel umkehrt, welche einer der beiden durch die Gerade bestimmten Halbebenen entweder mit allen drei oder nur mit einem Elemente angehören. Da jede besondere Lage der Geraden auch ein besonderes Charakteristikensystem bestimmt, erkennt man, dafs der einen wie der anderen Halbebene gegenüber mindestens ein Fundamentaltripel existiert, von welchem sie entweder alle drei oder nur einen einzigen Punkt enthält.

Ein näherer Vergleich der 16 linealen Teilungen

1) von III. $\mathfrak{P}_6$ und 2) von IV. $\mathfrak{P}_6$

hinsichtlich ihres topologischen Charakters ergiebt als wesentlich von einander verschieden

1) die zehn Strahlenbereiche:

$$\mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6;$$
$$\mathfrak{p}_1 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1; \quad \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2;$$
$$\mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5 | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6;$$
$$\mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4 | \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6;$$

2) die vier Bereiche:

$$\mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_2 | \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5 | \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_1 \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3.$$

Die Klassen der Gebilde

III. $\mathfrak{P}_6$ und IV. $\mathfrak{P}_6$

weisen also resp.

zehn und vier

allotethische Formen auf.

Gegenüber einem Punktesysteme der Klasse

I. $\mathfrak{P}_6' \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6'$

mit den sechs Fundamendaltripeln

$$\mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2'; \quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3'; \quad \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4'; \quad \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5'; \quad \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6'; \quad \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_1'$$

existieren formal drei Einteilungen desselben in je zwei solche Gruppen

a) $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_4'$ und $\mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6'$, b) $\mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_5'$ und $\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_1'$,

c) $\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_6'$ und $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5'$,

dafs irgend ein Fundamentaltripel ein Element der ersten und zwei der zweiten enthält.

Nun involviert das der Charakteristikenreihe

$$c(\mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2') = c(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3') = \cdots = c(\mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_1') = +1$$

entsprechende einfache konvexe Sechseck

$$\mathrm{I}_1.\ \mathfrak{P}_6' \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6'$$

gemäfs den primären Strahlenbereichen

$$\mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{P}_6';\quad \mathfrak{p}_1' | \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_2';\quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2' | \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_3';\quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_3' | \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_1'$$

vier einander zwar äquivalente, aber zugleich allotethische Gebilde

$$\mathrm{I}_1.\ \mathfrak{P}_6',\quad \mathrm{I}_2.\ \mathfrak{P}_6',\quad \mathrm{I}_3.\ \mathfrak{P}_6',\quad \mathrm{I}_4.\ \mathfrak{P}_6'$$

mit den korrespondierenden Bereichen

$$\mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{P}_6';\quad \mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_2';\quad \mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_3';\quad \mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_4'.$$

Eine Prüfung dieser vier Punktgebilde auf ihre etwaigen linealen Zerlegungen

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+3} | \mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}', \mathfrak{p}_{i_3}', \mathfrak{p}_{i_4}'$$

ergiebt als einzige solche:

in I_2 und I_3 resp. $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_4' | \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6'$ und $\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_6' | \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5'$,

in I_4 aber $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_4' | \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6'$ und $\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_6' | \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5'$.

Infolgedessen lassen sich die Punktegruppen

$$^*)\ \mathrm{I}_{2a},\quad \mathrm{I}_{3a},\quad \mathrm{I}_{4a}$$

resp. in die anderen überführen

$$\mathrm{I}_{2b},\quad \mathrm{I}_{3b},\quad \mathrm{I}_{4b}\ \text{u.}\ \mathrm{I}_{4c},$$

sodafs die jedesmaligen sechs Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2';\quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3';\quad \ldots;\quad \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6';\quad \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_1'$$

zwar nicht die Charakteristiken ändern,

$\mathrm{I}_2)$ $c_1 = -1,\ c_2 = -1,\ c_3 = +1,\ c_4 = +1,\ c_5 = +1,\ c_6 = -1,$

$\mathrm{I}_3)$ $c_1 = +1,\ c_2 = +1,\ c_3 = -1,\ c_4 = +1,\ c_5 = +1,\ c_6 = -1,$

$\mathrm{I}_4)$ $c_1 = +1,\ c_2 = -1,\ c_3 = +1,\ c_4 = -1,\ c_5 = +1,\ c_6 = -1,$

$$c_i = c(\mathfrak{p}_{i-1}', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i+1}'),$$

wohl aber ihre Hauptpunkte wechseln, und zwar treten an die Stellen der Hauptpunkte

*) Diese Punktsysteme und die aus ihnen neu entstehenden werden durch die Tafel IV veranschaulicht.

$$\begin{aligned}
&\text{I}_{2a}) \quad \mathfrak{p}_\infty, \quad \mathfrak{p}_3', \quad \mathfrak{p}_3', \quad \mathfrak{p}_4', \quad \mathfrak{p}_5', \quad \mathfrak{p}_5',\\
&\text{I}_{3a}) \quad \mathfrak{p}_2', \quad \mathfrak{p}_1', \quad \mathfrak{p}_4', \quad \mathfrak{p}_4', \quad \mathfrak{p}_5', \quad \mathfrak{p}_5',\\
&\text{I}_{4a}) \quad \mathfrak{p}_2', \quad \mathfrak{p}_2', \quad \mathfrak{p}_2', \quad \mathfrak{p}_5', \quad \mathfrak{p}_5', \quad \mathfrak{p}_5'
\end{aligned}$$

resp. die anderen:

$$\begin{aligned}
&\text{I}_{2b}) \quad \mathfrak{p}_1', \quad \mathfrak{p}_2', \quad \mathfrak{p}_2', \quad \mathfrak{p}_\infty, \quad \mathfrak{p}_6', \quad \mathfrak{p}_6',\\
&\text{I}_{3b}) \quad \mathfrak{p}_1', \quad \mathfrak{p}_2', \quad \mathfrak{p}_2', \quad \mathfrak{p}_5', \quad \mathfrak{p}_4', \quad \mathfrak{p}_1',\\
&\text{I}_{4b}) \quad \mathfrak{p}_6', \quad \mathfrak{p}_3', \quad \mathfrak{p}_3', \quad \mathfrak{p}_3', \quad \mathfrak{p}_6', \quad \mathfrak{p}_6',\\
&\text{I}_{4c}) \quad \mathfrak{p}_1', \quad \mathfrak{p}_1', \quad \mathfrak{p}_4', \quad \mathfrak{p}_4', \quad \mathfrak{p}_4', \quad \mathfrak{p}_1'.
\end{aligned}$$

Im Falle eines Systemes II. $\mathfrak{P}_6$ bezeichne man die fünf Ecken des zugehörigen Aufsenpolygones in derjenigen positiven Folge durch

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5',$$

bei welcher das endliche Dreiseit

$$|\mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_5'|, \quad |\mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_1'|, \quad |\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_1'|$$

den sechsten Punkt $\mathfrak{p}_6'$ einschliefst.

Entsprechend den zehn primären Strahlenbereichen

$$\begin{aligned}
&1) \quad \mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5',\\
&2) \qquad a) \ \mathfrak{p}_1' | \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_5'; \quad b) \ \mathfrak{p}_2' | \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_3'; \quad c) \ \mathfrak{p}_3' | \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_4';\\
&3) \ a) \ \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_1' \ \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_2'; \quad b) \ \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2' \ \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_3'; \quad c) \ \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3' | \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_1'; \quad d) \ \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_6' \ \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_5';\\
&4) \qquad a) \ \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3' | \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6'; \quad b) \ \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4' | \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_5'
\end{aligned}$$

kann man dasselbe in ebensoviele ihm und einander äquivalente aber allothetische Punktegruppen überführen.

Nun zeigt aber das zu Grunde liegende System von Fundamentaltripeln

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3'; \quad \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4'; \quad \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5'; \quad \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_1'; \quad \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_5'; \quad \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_2'$$

eine einzige Einteilung jedes denkbaren Punktsystemes II. $\mathfrak{P}_6'$ in zwei Gruppen

$$\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5',$$

so dafs irgend ein Fundamentaltripel einen Punkt der ersten und zwei Punkte der zweiten enthält. Es fragt sich also, in welchen der zehn allothetischen Gebilde II. $\mathfrak{P}_6'$ dieser idealen eine reale Teilung durch einen Strahlenbereich entspricht.

In den vier ersten Gruppen

$$\text{II}_1, \quad \text{II}_{2a}, \quad \text{II}_{2b}, \quad \text{II}_{2c}$$

liegen die Punkte

$$\mathfrak{p}_3' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_6'$$

aufserhalb und innerhalb der resp. Dreiecksflächen

$$\triangle(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_5'), \quad \triangle(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_5'), \quad \triangle(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5'), \quad \triangle(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5'),$$

in den drei weiteren

$$II_{3a}, \quad II_{3c}, \quad II_{3d}$$

analog zu den Flächen

$$\triangle(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_4'), \quad \triangle(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5'); \quad \triangle(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_5'),$$

endlich in dem Falle II_{1b} entsprechend zu dem einfachen konvexen Viereck

$$\mathfrak{p}_2', \quad \mathfrak{p}_1', \quad \mathfrak{p}_1', \quad \mathfrak{p}_5'.$$

In diesen acht Punktgruppen existiert also keine lineale Zerlegung

$$\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_6' \mid \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5',$$

die Charakteristikenreihe der Fundamentaltripel jedes einzelnen definiert also ein einziges System von Hauptpunkten.

Anders in den noch übrigen zwei Gebilden

$$^*) \, II_{3b} \quad \text{und} \quad II_{4a}.$$

Eine projektive Transformation des zu dem ersten gehörigen primären Strahlenbereiches

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2' \quad \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_3'$$

in den anderen

$$\mathfrak{p}_\infty \mid \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_3'$$

läfst eine Punktgruppe entstehen

$$II_{3b}. \ \mathfrak{P}_6',$$

gebildet aus einem einfachen konvexen Aufsenviereck mit der positiven Eckenfolge

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_3',$$

einem Punkte $\mathfrak{p}_5'$ im Innern der durch die drei anderen

$$\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{q} \equiv (|\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_2'|, |\mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_1'|)$$

bestimmten endlichen Dreiecksfläche und einem Punkte $\mathfrak{p}_5'$ innerhalb der von den drei Geraden

$$|\mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_1'|, \quad |\mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_2'|, \quad |\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4'|$$

eingeschlossenen analogen Fläche.

*) Die Gebilde II_{3b}, $II_{3b'}$ und II_{4a}, $II_{4a'}$ sind gleichfalls auf Tafel IV dargestellt.

Gemäfs dem in diesem Systeme thatsächlich vorhandenen Strahlenbereiche

$$\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_6' \,|\, \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5'$$

wird eine stetige Uberführung des letzteren in den Bereich

$$\mathfrak{p}_\infty \,|\, \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_6'$$

die Charakteristiken der Fundamentaltripel nicht alterieren.

In dem ursprünglichen und dem resultierenden Systeme

$$\mathrm{II}_{3\,\mathrm{b}}.\ \mathfrak{P}_6' \quad \text{und} \quad \mathrm{II}_{3\,\mathrm{b}'}.\ \mathfrak{P}_6'$$

gehören deshalb zu der nämlichen Charakteristikenreihe

$$c_{1,2,3} = +1, \quad c_{2,3,4} = -1, \quad c_{3,4,5} = +1,$$
$$c_{5,6,1} = +1, \quad c_{5,6,2} = -1, \quad c_{1,6,4} = +1$$

resp. die entsprechend geordneten Hauptpunktsysteme

$$\text{b)}\ \mathfrak{p}_1', \ \mathfrak{p}_4', \ \mathfrak{p}_4', \ \mathfrak{p}_5', \ \mathfrak{p}_5', \ \mathfrak{p}_1',$$
$$\text{b')}\ \mathfrak{p}_2', \ \mathfrak{p}_2', \ \mathfrak{p}_3', \ \mathfrak{p}_1', \ \mathfrak{p}_2', \ \mathfrak{p}_1'.$$

Mit gleichem Erfolge leitet man aus dem Grundsysteme II. $\mathfrak{P}_6'$ vermöge der Überführung des Strahlenbereiches

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_3' \,|\, \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_4'$$

in den anderen

$$\mathfrak{p}_\infty \,|\, \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_4'$$

ein neues ab

$$\mathrm{II}_{4\,\mathrm{a}}.\ \mathfrak{P}_6',$$

bestehend aus einem einfachen konvexen Aufsenviereck mit der positiven Eckenfolge

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_4',$$

einem im Innern der durch die drei Punkte

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{q} \equiv (|\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_6'|, |\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4'|)$$

bestimmten endlichen Dreiecksfläche liegenden Punkte $\mathfrak{p}_2'$ und einem innerhalb der durch die drei Geraden

$$|\mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_1'|, \quad |\mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_2'|, \quad |\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4'|$$

eingeschlossenen analogen Fläche enthaltenen Punkte $\mathfrak{p}_5'$.

Da hier wiederum ein primärer Strahlenbereich des bekannten Charakters vorhanden, nämlich

$$\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_6' \,|\, \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5',$$

kann man das vorstehende Gebilde durch entsprechende Transformation dieses Bereiches in den anderen

$$\mathfrak{p}_\infty \,|\, \mathfrak{p}_6', \ \mathfrak{p}_3', \ \mathfrak{p}_5', \ \mathfrak{p}_2'$$

ein zweites Gebilde erzeugen

$$\Pi_{4\,a'} . \ \mathfrak{P}_6',$$

so dafs beide Punktsysteme bei ein und derselben Charakteristikenreihe

$$c_{1,2,5} = -1, \quad c_{2,3,4} = +1, \quad c_{3,4,5} = -1,$$
$$c_{5,6,1} = +1, \quad c_{5,6,2} = -1, \quad c_{4,6,1} = -1$$

in entsprechender Folge die veränderten Hauptpunkte darbieten:

$$\Pi_{4\,a}) \ \mathfrak{p}_2', \ \mathfrak{p}_2', \ \mathfrak{p}_5', \ \mathfrak{p}_5', \ \mathfrak{p}_5', \ \mathfrak{p}_4',$$
$$\Pi_{4\,a'}) \ \mathfrak{p}_1', \ \mathfrak{p}_4', \ \mathfrak{p}_4', \ \mathfrak{p}_1', \ \mathfrak{p}_2', \ \mathfrak{p}_1'.$$

Es seien zwei die nämliche Verkettung von Fundamentaltripeln darstellende Punktgruppen

$$\mathfrak{P}_6' = \mathfrak{p}_1', \ \mathfrak{p}_2', \ \ldots, \ \mathfrak{p}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_6'' = \mathfrak{p}_1'', \ \mathfrak{p}_2'', \ \ldots, \ \mathfrak{p}_6''$$

im allgemeinen als äquivalent in dem Falle übereinstimmender Indexsysteme als isothetisch bezeichnet. Dann kann bezüglich derselben der folgende Satz ausgesprochen werden:

Sind in der Ebene E zwei äquivalente allgemeine Punktsysteme aus je sechs Elementen gegeben, so können dieselben allemal unter Erhaltung ihrer Fundamentaltripel durch passende stetige Bewegungen ihrer Elemente entsprechend zur Deckung gebracht werden.

Da bereits früher dargelegt worden, dafs zwei äquivalente Punktgruppen $\mathfrak{P}_6'$ und $\mathfrak{P}_6''$ gemäfs den Forderungen des Satzes stets in isothetische Gebilde überführbar sind, genügt es, den Beweis unter Voraussetzung solcher zu führen.

Mit Bezug auf die Gruppen

I. $\mathfrak{P}_6' \equiv \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6'$ und I. $\mathfrak{P}_6'' \equiv \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'', \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_4'', \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6''$

bemerke man, dafs die Punkte

$$\mathfrak{p}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_6''$$

rücksichtlich der gleichfalls isothetischen Systeme

$$\mathfrak{P}_5' \equiv \mathfrak{p}_2', \ \mathfrak{p}_3', \ \mathfrak{p}_1', \ \mathfrak{p}_4', \ \mathfrak{p}_5' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_5'' \equiv \mathfrak{p}_2'', \ \mathfrak{p}_3'', \ \mathfrak{p}_1'', \ \mathfrak{p}_4'', \ \mathfrak{p}_5''$$

in entsprechenden von den 2 . 3 Geraden

$$|\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_2'|, \ |\mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_5'|, \ |\mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_4'| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_3'', \mathfrak{p}_2''|, \ |\mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_5''|, \ |\mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_4''|$$

begrenzten Primärflächen liegen. Es können aber zwei solche fünfpunktige Systeme nach § 8 nicht nur unter Erhaltung ihrer Fundamentaltripel sondern auch ohne gestaltliche Änderungen ihrer Primärflächen stetig in einander übergehen. Indem man daher während der Überführung von $\mathfrak{P}_5'$ in $\mathfrak{P}_5''$ den Punkt $\mathfrak{p}_6'$ innerhalb seiner Primärfläche stetig mitbewegt, gelangt man auf die vorgeschriebene Art zu zwei Punktgruppen

$$\mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'', \mathfrak{p}_4'', \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'', \mathfrak{p}_4'', \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6'',$$

für welche die noch getrennten Elemente

$$\mathfrak{p}_6' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_6''$$

gegenüber dem durch die Paare koincidenter entsprechender Elemente

$$\mathfrak{p}_h' \equiv \mathfrak{p}_h''$$

bestimmten Geradensysteme ein und derselben Primärfläche angehören, so dafs sie aufserhalb der Verbindungsgeraden $|\mathfrak{p}_i'', \mathfrak{p}_k''|$ sich gleichfalls kontinuierlich vereinigen können.

In den Fällen zweier isothetischen Systeme

1) II. $\mathfrak{P}_6' \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5', (\mathfrak{p}_6')$ u. II. $\mathfrak{P}_6'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'', \mathfrak{p}_4'', \mathfrak{p}_5'', (\mathfrak{p}_6'')$,

2) III. $\mathfrak{P}_6' \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6', (\mathfrak{p}_4')$ u. III. $\mathfrak{P}_6'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'', \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6'', (\mathfrak{p}_4'')$,

3) IV. $\mathfrak{P}_6' \equiv \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_5', (\mathfrak{p}_1')$ u. IV. $\mathfrak{P}_6'' \equiv \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_4'', \mathfrak{p}_6'', \mathfrak{p}_3'', \mathfrak{p}_5'', (\mathfrak{p}_1'')$

denke man sich während der stetigen Überführung der Punktgruppen

$$\text{II. } \mathfrak{P}_5' \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5', \quad \text{III. } \mathfrak{P}_5' \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_6',$$
$$\text{IV. } \mathfrak{P}_5' \equiv \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_6', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_5'$$

in resp. die isothetischen Gruppen

$$\text{II. } \mathfrak{P}_5'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'', \mathfrak{p}_4'', \mathfrak{p}_5''; \quad \text{III. } \mathfrak{P}_5'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'', \mathfrak{p}_5'', \mathfrak{p}_6'',$$
$$\text{IV. } \mathfrak{P}_5'' \equiv \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_4'', \mathfrak{p}_6'', \mathfrak{p}_3'', \mathfrak{p}_5''$$

die sechsten Punkte

$$\mathfrak{p}_6', \quad \mathfrak{p}_4', \quad \mathfrak{p}_1'$$

innerhalb ihrer durch die Geradensysteme der bewegten Gruppen bestimmten Primärflächen kontinuierlich mitbewegt. Dann werden nach eingetretener Koincidenz von

$$\text{II. } \mathfrak{P}_5' \text{ mit II. } \mathfrak{P}_5'', \quad \text{III. } \mathfrak{P}_5' \text{ mit III. } \mathfrak{P}_5'', \quad \text{IV. } \mathfrak{P}_5' \text{ mit IV. } \mathfrak{P}_5''$$

die Punkte

$$\mathfrak{p}_6' \text{ und } \mathfrak{p}_6'', \quad \mathfrak{p}_4' \text{ und } \mathfrak{p}_4'', \quad \mathfrak{p}_1' \text{ und } \mathfrak{p}_1''$$

innerhalb derselben Primärflächen liegen und deshalb gleichfalls aufserhalb der Verbindungsgeraden je zweier anderen Punkte stetig in einander übergehen. Q. e. d.

Nach dieser Erledigung der letzten betreffs des allgemeinen ebenen Punktsystemes $\mathfrak{P}_6$ offenen Frage kann man die Hauptresultate der bisherigen Untersuchung wie folgt präzisieren:

Theorem 11*): Sechs in der Ebene frei bewegliche Punkte können bei allgemeiner gegenseitiger Lage im Ganzen vier verschiedenartige Verkettungen primärer Punktetripel bilden, nämlich entsprechend den Schematen:

I) p_6, p_1, p_2; p_1, p_2, p_3; p_2, p_3, p_4; p_3, p_4, p_5; p_4, p_5, p_6; p_5, p_6, p_1;

II) p_1, p_2, p_3; p_2, p_3, p_4; p_3, p_4, p_5; p_6, p_4, p_1; p_6, p_1, p_5; p_6, p_5, p_2;

III) p_1, p_2, p_3; p_2, p_3, p_4; p_3, p_1, p_5; p_4, p_5, p_1;
p_6, p_1, p_3; p_6, p_1, p_4; p_6, p_2, p_5;

IV) p_3, p_1, p_4; p_1, p_4, p_2; p_4, p_2, p_5; p_2, p_5, p_3; p_5, p_3, p_1;
p_6, p_1, p_2; p_6, p_2, p_3; p_6, p_3, p_4; p_6, p_4, p_5; p_6, p_5, p_1.

Die Punktsysteme der gleichen Gruppierung von Fundamentaltripeln konstituieren eine Klasse äquivalenter, d. h. solcher Gebilde, welche unter Erhaltung des allgemeinen Charakters durch passende stetige Bewegungen ihrer Elemente miteinander zur Deckung gebracht werden. Sie besitzen ein und dasselbe bis auf den Drehungssinn des einzelnen Index unzweideutig bestimmte Indexsystem.

Gemäfs den verschiedenen für die Fundamentaltripel einer Verkettung wählbaren Charakteristikenreihen sondern sich die Individuen einer Klasse selbst wieder in mehrere getrennte Kontinuen isothetischer Gebilde, und zwar die Mitglieder der beiden Klassen

I. $\mathfrak{P}_6$ und IV. $\mathfrak{P}_6$

*) Die Tafel V veranschaulicht die verschiedenen Möglichkeiten, wie aus einem gegebenen allgemeinen Punktsysteme $\mathfrak{P}_5$ durch entsprechende Wahl eines weiteren Punktes p_6 gleiche und ungleichartige Systeme $\mathfrak{P}_6$ herzustellen sind. Durch die verschiedene (bezw. gleiche) Schraffierung der Primärflächen des Systemes $\mathfrak{P}_5$ werden die den vier Klassen von Punktgruppen $\mathfrak{P}_6$ eigentümlichen Lagen eines sechsten Punktes angedeutet. Man bemerkt, dafs sowohl die Flächen I und III als auch die anderen II und IV je ein in sich geschlossenes System von Scheitelflächen bestimmen.

in je vier, die der beiden anderen

II. $\mathfrak{P}_6$ und III. $\mathfrak{P}_6$

in je zehn. Insgesamt existieren daher 28 allothetische Anordnungen von sechs lineal unabhängigen Punkten der Ebene.

In den Klassen III. $\mathfrak{P}_6$ und IV. $\mathfrak{P}_6$ herrscht zwischen den Charakteristikenreihen der Fundamentaltripel und den Systemen der Indices jeder beliebigen Punktgruppe eine eindeutig umkehrbare Abhängigkeit. Das Gleiche gilt innerhalb gewisser acht Unterkontinuen der Klasse II. $\mathfrak{P}_6$ und in einem der Klasse I. $\mathfrak{P}_6$.

Dagegen definieren die Charakteristiken der Fundamentaltripel

1) in den noch übrigen zwei Unterkontinuen der Klasse II. $\mathfrak{P}_6$ zwei —

2) in den drei weiteren

$$I_2.\ \mathfrak{P}_6,\quad I_3.\ \mathfrak{P}_6,\quad I_4.\ \mathfrak{P}_6$$

der Klasse I. $\mathfrak{P}_6$ aber resp.

zwei, zwei und drei

Indexsysteme allothetischer Punktgruppen.

Der Charakter oder das Indexsystem eines lineal unabhängigen Punktgebildes $\mathfrak{P}_6$ wird daher ganz allgemein durch die Art der Verkettung seiner den Charakteristiken und Hauptpunkten nach wohl definierten Fundamentaltripel vollkommen und unzweideutig bestimmt.

Die Untersuchungen über die allgemeinen Punktsysteme $\mathfrak{P}_6$ zu vervollständigen, mögen noch die den vier Klassen desselben entsprechenden Einteilungen des ebenen Strahlenfeldes angegeben werden.

Die Punktgruppen des Indexsystemes

$$\text{I. } J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6,\quad J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1,$$
$$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2,\quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3,$$
$$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4,\quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

bestimmen als Grenzgebilde der zugehörigen primären Strahlenbereiche:

1) die sechs Punktetripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;\quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5;\quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6;\quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1;\quad \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2;$$

2) die neun Punktequadrupel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4;\quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5;\quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6;$$
$$\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1;\quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2;\quad \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3;$$
$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5;\quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6;\quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1;$$

3) das einfache Sechseck

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6.$$

Die Punktgruppen des Indexsystemes

II. $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5,\quad J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1,$
$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2,\quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3,$
$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4,\quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$

bestimmen als Grenzgebilde der zugehörigen primären Strahlenbereiche:

1) die sechs Punktetripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;\quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5;$$
$$\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1;\quad \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5;\quad \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2;$$

2) die acht Punktequadrupel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3;\quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4;\quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5;\quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6;$$
$$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6;\quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6;\quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5;\quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1;$$

3) die beiden Punktequintipel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5.$$

Die Punktgruppen des Indexsystemes

III. $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5,\quad J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1;$
$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2,\quad J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;$
$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1,\quad J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$

definieren als Grenzpolygone der entsprechenden primären Strahlenbereiche:

1) die sieben Punktetripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;\quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5;\quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1;$$
$$\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2;\quad \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1;\quad \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1;$$

2) die sechs Punktequadrupel

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5;\quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2;\quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5;$$
$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5;\quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2;\quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5;$$

3) die drei Punktequintipel:

$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$.

Endlich bestimmt eine Punktgruppe des Indexsystemes

IV. $J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$, $J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$,
$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$, $J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$,
$J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1$, $J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$

als Grenzvielecke seiner primären Strahlenbereiche:

1) die zehn Punktetripel

$\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$;
$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5$;

2) die sechs Punktequintipel

$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4$;
$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4$.

---

§ 10. Die singulären Punktsysteme $\mathfrak{P}_6$.

Aus der im vorigen Paragraphen erkannten Möglichkeit, ein in der Ebene veränderliches Punktsystem $\mathfrak{P}_6'$ durch stetige Bewegungen seiner Elemente in ein festliegendes ihm äquivalentes anderes $\mathfrak{P}_6''$ so entsprechend überzuführen, dafs während der Überführung je drei Punkte von $\mathfrak{P}_6'$ in allgemeiner Lage verbleiben, folgt für die stetige Überführung zweier allgemeinen aber inäquivalenten Punktsysteme ineinander die Notwendigkeit des Durchganges eines von ihnen durch einen solchen Grenzzustand, in welchem mindestens drei seiner Elemente ein und derselben Geraden angehören.

Ein singuläres Punktsystem $\mathfrak{S}_6$ ist hiernach als ein gemeinsamer Grenzfall zweier oder mehrerer inäquivalenten Punktgruppen aufzufassen.

Um rücksichtlich der vier Typen allgemeiner Punktgruppen

I. $\mathfrak{P}_6$, II. $\mathfrak{P}_6$, III. $\mathfrak{P}_6$, IV. $\mathfrak{P}_6$

die gemeinsamen Grenzzustände festzustellen, gehe man aus von einem durch die positive Punktefolge*)

$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$

---

*) Allgemein wird die einem positiven Umlaufe eines einfachen konvexen n-Eckes entsprechende Eckenfolge

$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_n$

als positive Punktefolge bezeichnet.

dargestellten Systeme I. $\mathfrak{P}_6$. — Die in dem allgemeinen fünfpunktigen Systeme

$$\mathfrak{P}_5 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

von resp. den Geraden

1) $|\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1|$, $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5|$, $|\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4|$,
2) $|\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1|$, $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5|$, $|\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2|$,
3) $|\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2|$, $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3|$, $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4|$,
4) $|\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1|$, $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3|$, $|\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5|$, $|\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2|$, $|\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4|$

eingeschlossenen endlichen Flächen seien kurz unterschieden durch resp. die Benennungen:

$$F_1, F_2, F_3, F_4.$$

Indem man alsdann den Punkt $\mathfrak{p}_6$ durch fortgesetzte Bewegung

1) aus der Fläche F_1 durch die Gerade $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5|$ in die Fläche F_2,
2) aus dieser durch die Gerade $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4|$ in F_3,
3) hieraus durch die Gerade $|\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5|$ in F_4 überführt,

erhält man entsprechend den successiven Lagen von $\mathfrak{p}_6$ in den drei Flächen

$$F_2, F_3, F_4$$

drei Repräsentanten der Punktegruppen

$$\text{II. } \mathfrak{P}_6, \quad \text{III. } \mathfrak{P}_6, \quad \text{IV. } \mathfrak{P}_6.$$

Es werde der stetige Übergang eines Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$$

aus der allgemeinen Lage

$$c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l) = \pm 1$$

durch die singuläre

$$c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l) = 0$$

in die allgemeine Lage

$$c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l) = \mp 1$$

als eine Inversion des Tripels bezeichnet. — Klassifiziert man die einzelnen Neubildungen, welche durch solche Inversionen aus einer und derselben Punktegruppe $\mathfrak{P}_6$ entstehen, so findet man leicht die folgenden Beziehungen:

Eine Punktegruppe I. $\mathfrak{P}_6$ geht, welches ihrer Fundamentaltripel auch eine Inversion erfahren mag, allemal in eine Gruppe II. $\mathfrak{P}_6$ über.

Eine Gruppe II. $\mathfrak{P}_6$ wird

a) durch die Inversion eines der Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$$

von einer Gruppe I. $\mathfrak{P}_6$,

b) durch diejenige eines der $2 \cdot 2$ Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3$$

aber von einer Gruppe III. $\mathfrak{P}_6$ getrennt.

Ein Punktsystem III. $\mathfrak{P}_6$ geht

a) infolge der Inversion eines der sechs Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4;$$
$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3$$

in ein System II. $\mathfrak{P}_6$,

b) durch diejenige des einen Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5$$

in ein System IV. $\mathfrak{P}_6$ über.

Dieses letzte System endlich mufs mittelst jeder Inversion in ein System III. $\mathfrak{P}_6$ zurückgeführt werden.

Aus alledem ersieht man, dafs die beiden Punktegruppen

$$\text{I. } \mathfrak{P}_6 \quad \text{und} \quad \text{IV. } \mathfrak{P}_6$$

gegenüber den beiden anderen

$$\text{II. } \mathfrak{P}_6 \quad \text{und} \quad \text{III. } \mathfrak{P}_6$$

dadurch ausgezeichnet sind, dafs aus ihnen auch bei Inversionen verschiedener Fundamentaltripel doch stets äquivalente Gebilde resultieren.

Wenn mit Bezug auf zwei inäquivalente Punktsysteme $\mathfrak{P}_6$ die kleinste Anzahl von Inversionen, welche zu ihrer kontinuierlichen Überführung ineinander erforderlich ist, als das Mafs der Inäquivalenz beider definiert wird, läfst sich der geschilderte Zusammenhang zwischen den vier typisch verschiedenen Punktegruppen $\mathfrak{P}_6$ so aussprechen:

Das Mafs der Inäquivalenz zweier Punktegruppen der Reihe

$$\text{I. } \mathfrak{P}_6, \text{ II. } \mathfrak{P}_6, \text{ III. } \mathfrak{P}_6, \text{ IV. } \mathfrak{P}_6$$

wird durch die absolute Differenz ihrer Klassenindices angegeben.

Es seien die aus den drei Punktegruppen

$$\text{I. } \mathfrak{P}_6, \text{ II. } \mathfrak{P}_6, \text{ III. } \mathfrak{P}_6$$

gemäfs den resp. Bedingungen

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5) = 0, \quad c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4) = 0, \quad c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5) = 0$$

entstehenden singulären Systeme ersten Grades bezeichnet durch:

$$\mathfrak{S}_1', \quad \mathfrak{S}_2', \quad \mathfrak{S}_3'.$$

Da im Falle zweier äquivalenten Systeme

$$\mathfrak{S}_h' \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{S}}_h'$$

die in ihnen enthaltenen allgemeinen Punktegruppen

$$\mathfrak{P}_5 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{P}}_5 \equiv \overline{\mathfrak{p}}_1, \overline{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{p}}_5$$

ebenfalls äquivalent sind, können diese nach § 8 stetig in einander übergeführt werden, ohne dafs eine einzige der auf den Verbindungsgeraden ihrer Elemente bestimmten primären Grenzstrecken verschwindet.

Man kann sich deshalb während des Überganges von $\mathfrak{P}_5$ in $\overline{\mathfrak{P}}_5$ die Punkte

$$\mathfrak{p}_6 \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{p}}_6$$

auf den durch sie gehenden Primärstrecken

$$s \quad \text{und} \quad \overline{s}$$

stetig mitbewegt denken und nach erfolgter Coincidenz beider Gruppen sie sich ebenso vereinigen lassen. Also folgt:

Zwei äquivalente Punktsysteme $\mathfrak{S}_h'$ und $\overline{\mathfrak{S}}_h'$ können allemal unter Erhaltung ihres beiderseitigen Charakters durch kontinuierliche Bewegungen ihrer Elemente entsprechend zur Deckung gebracht werden.

Wie die stetige Überführbarkeit zweier inäquivalenten allgemeinen Punktsysteme $\mathfrak{P}_6$ an das Auftreten eines gemeinsamen singulären Grenzsystemes $\mathfrak{S}_h'$ ersten Grades gebunden, so ist die analoge Vereinigung zweier inäquivalenten Systeme dieser Art nur durch ihren Übergang in ein gemeinsames singuläres Grenzsystem $\mathfrak{S}''$ zweiten Grades möglich.

Man findet:

1) als gemeinsamen Grenzfall der drei Gruppen

$$\text{I. } \mathfrak{P}_6, \quad \text{II. } \mathfrak{P}_6, \quad \text{III. } \mathfrak{P}_6$$

das aus der ersten gemäfs den beiden Bedingungen

$$c(\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = 0 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4) = 0$$

resultierende System $\mathfrak{S}_1''$;

2) als gemeinsamen Grenzfall der drei Gruppen

$$\text{II. } \mathfrak{P}_6, \quad \text{III. } \mathfrak{P}_6, \quad \text{IV. } \mathfrak{P}_6$$

die aus der letzten zufolge der Bedingungen

a) $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3) = 0$, b) $c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3) = 0$,

c) $c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = c(\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5) = 0$

entstehenden singulären Systeme

$$\mathfrak{S}_2'', \quad \mathfrak{S}_3'', \quad \mathfrak{S}_4''.$$

Das aus I. $\mathfrak{P}_6$ durch Verschwinden der Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1$$

hervorgehende System $\mathfrak{S}_5''$ bildet nur einen gemeinsamen Grenzfall der beiden Gruppen

$$\text{I. } \mathfrak{P}_6 \quad \text{und} \quad \text{II. } \mathfrak{P}_6.$$

Man beweist leicht, wie oben, mit Hülfe zweier äquivalenten fünfpunktigen Systeme die Möglichkeit stetiger Translation je zweier äquivalenten Systeme $\mathfrak{S}_h''$.

Als gemeinsame Grenzfälle aller vier Punktegruppen

$$\text{I. } \mathfrak{P}_6, \ \text{II. } \mathfrak{P}_6, \ \text{III. } \mathfrak{P}_6, \ \text{IV. } \mathfrak{P}_6$$

ergeben sich:

1) aus I. $\mathfrak{P}_6$ entsprechend den Bedingungen

a) $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5) = 0$,

b) $c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1) = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5) = 0$,

2) aus IV. $\mathfrak{P}_6$ entsprechend den Bedingungen

a) $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4) = 0$,

b) $c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1) = c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5) = c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4) = 0$

gebildeten singulären Systeme dritten Grades

$$\text{a) } \mathfrak{S}_1''' \quad \text{und} \quad \text{b) } \mathfrak{S}_2'''.$$

In der That kann man aus einem Systeme $\mathfrak{S}_1'''$ der ersten Entstehungsweise durch passende Bewegungen seiner Elemente unmittelbar zu den vier allgemeinen Gruppen $\mathfrak{P}_6$ zurückkehren. — Unterscheidet man nämlich die beiden Teile der Ebene, in welche diese durch die nach Lage und Richtung gegebene Gerade

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2| \equiv |\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3| \equiv |\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4| \equiv |\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5|$$

zerschnitten wird, wieder durch

$$+E \quad \text{und} \quad -E,$$

läfst darauf die Elemente der vier Tripel

1) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$, 2) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$, 3) $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5$, 4) $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3$

in vorstehender Reihenfolge und unter Vermeidung neuer Singularitäten aus ihrer lineal abhängigen Lage zu den Punkten

1) 2) $\mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{p}_5$, 3) $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_4$, 4) $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_5$

in resp. die Halbebenen eintreten

1) $+E, +E, +E,$ 2) $+E, +E, -E,$

3) $-E, +E, +E,$ 4)*) $+E, +E, +E,$

so erhält man, wie behauptet, die vier Systeme

I. $\mathfrak{P}_6$, II. $\mathfrak{P}_6$, III. $\mathfrak{P}_6$, IV. $\mathfrak{P}_6$.

Analog gelangt man unter Annahme eines aus dem allgemeinen Punktetripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$$

und den Punkten

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6$$

auf resp. den endlichen Strecken

$$\overline{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3}, \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$$

gebildeten Systemes $\mathfrak{S}_2'''$, respektive dadurch zu den Punktegruppen

I. $\mathfrak{P}_6$, II. $\mathfrak{P}_6$, III. $\mathfrak{P}_6$, IV. $\mathfrak{P}_6$,

dafs man die drei Punkte

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$$

unter Aufhebung ihrer singulären Lagen vermöge stetiger neue Besonderheiten vermeidender Bewegungen

1) entweder sämtlich in die Umgebung —

2) oder zu zweien in die Umgebung, zu einem in das Innere —

3) oder zu einem in die Umgebung, zu zweien in das Innere —

4) oder sämtlich in das Innere —

der endlichen Dreiecksfläche $\triangle(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5)$ verlegt.

Weitere den obigen inäquivalente singuläre Punktsysteme dritten Grades findet man als gemeinsame Grenzfälle der drei Punktegruppen

I. $\mathfrak{P}_6$, II. $\mathfrak{P}_6$, III. $\mathfrak{P}_6$,

indem man das System

I. $\mathfrak{P}_6$

den Bedingungen unterwirft:

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = c(\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4) = c(\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6) = 0.$$

Denn bezeichnet man die durch die Geraden

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5|$$

*) In diesem Falle müssen die Punkte $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_4$ gleichzeitig in die Halbebene $+E$ eintreten.

bestimmten vier Teile der Ebene in der einer positiven Umkreisung des Punktes $\mathfrak{p}_4$ entsprechenden Folge mit

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,$$

und wählt zu dem Ausgange der Bewegung die Fläche $\triangle(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5)$, so erhält man je nach den successiven Übergängen der Punkte

$$\mathfrak{p}_4 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_3$$

1) a) in w_1 und w_1, b) in w_2 und w_2,
c) in w_3 und w_2, d) in w_4 und w_2

eine Gruppe I. $\mathfrak{P}_6$,

2) a) in w_1 und w_2, b) in w_2 und w_1,
c) in w_3 und w_1, d) in w_4 und w_1

eine Gruppe II. $\mathfrak{P}_6$.

Dagegen führt der successive Eintritt der Punkte

$$\mathfrak{p}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_4$$

1) a) in w_1 und w_3, b) in w_2 und w_4

zu einer Gruppe I. $\mathfrak{P}_6$,

2) a) in w_1 und w_2, b) in w_1 und w_4,
c) in w_2 und w_1, d) in w_2 und w_3

zu einer Gruppe II. $\mathfrak{P}_6$,

3) a) in w_1 und w_1, b) in w_2 und w_2

zu einer Gruppe III. $\mathfrak{P}_6$.

Auch hier gilt der Satz:

Zwei äquivalente Systeme $\mathfrak{S}_4'''$ sind allemal ohne Änderung ihres Charakters stetig in einander überführbar.

Endlich resultiert als einziges singuläres System vierten Grades das aus IV. $\mathfrak{P}_6$ zufolge der Singularitäten

$$c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = c(\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5) = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4) = c(\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2)$$

entstehende gemeinsame Grenzsystem der drei Punktegruppen

$$\text{II. } \mathfrak{P}_6,\ \text{III. } \mathfrak{P}_6,\ \text{IV. } \mathfrak{P}_6.$$

Seien nämlich die in den Punkten

$$\mathfrak{p}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_6$$

durch die zwei Paare singulärer Geraden bestimmten $2 \cdot 4$ Winkel in positiver Umdrehungsfolge gegeben durch resp.

$$w_1''',\ w_2''',\ w_3''',\ w_4''' \quad \text{und} \quad w_1^{(6)},\ w_2^{(6)},\ w_3^{(6)},\ w_4^{(6)},$$
$$(w_1''' \equiv \mathfrak{p}_3 \,|\, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4 \,| \quad \text{und} \quad w_1^{(6)} \equiv \mathfrak{p}_6 \,|\, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2 \,|)$$

dann entsprechen dem Austreten der Punkte

$$\mathfrak{p}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_6$$

aus ihren singulären Lagen in resp. die Winkel

1) a) in w_1''' und $w_3^{(6)}$, b) in w_2''' und $w_2^{(6)}$, c) in w_2''' und $w_4^{(6)}$,
d) in w_3''' und $w_1^{(6)}$, e) in w_4''' und $w_2^{(6)}$, f) in w_4''' und $w_4^{(6)}$

eine Punktegruppe II. $\mathfrak{P}_6$,

2) a) in w_1''' und $w_2^{(6)}$, b) in w_1''' und $w_4^{(6)}$,
c) in w_2''' und $w_1^{(6)}$, d) in w_2''' und $w_3^{(6)}$,
e) in w_4''' und $w_2^{(6)}$, f) in w_3''' und $w_4^{(6)}$,
g) in w_4''' und $w_1^{(6)}$, h) in w_4''' und $w_3^{(6)}$

eine Punktegruppe III. $\mathfrak{P}_6$,

3) a) in w_1''' und $w_1^{(6)}$, b) in w_3''' und $w_3^{(6)}$

eine Punktegruppe IV. $\mathfrak{P}_6$.

Eine besonders bemerkenswerte Eigenschaft dieses letzten Systemes $\mathfrak{S}^{(4)}$ stellt die durch dasselbe bedingte Einteilung des ebenen Strahlenfeldes in die zwölf Primärbereiche dar:

$$\begin{array}{rrrrr} \mathfrak{p}_1|\mathfrak{p}_2,\mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_2|\mathfrak{p}_4,\mathfrak{p}_1; & \mathfrak{p}_4|\mathfrak{p}_5,\mathfrak{p}_2; & \mathfrak{p}_5|\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_4; \\ \mathfrak{p}_\infty|\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_3,\mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_3|\mathfrak{p}_2,\mathfrak{p}_4; & \mathfrak{p}_2|\mathfrak{p}_3,\mathfrak{p}_6; & \mathfrak{p}_4|\mathfrak{p}_3,\mathfrak{p}_6; \\ \mathfrak{p}_6|\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_6|\mathfrak{p}_5,\mathfrak{p}_3; & \mathfrak{p}_6|\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_5; & \mathfrak{p}_6|\mathfrak{p}_2,\mathfrak{p}_4. \end{array}$$

Als Ergänzung des Theorems (11) besteht noch der Satz:

In jedem singulären Systeme $\mathfrak{P}_6$ bestimmt das vollständig nach Charakteristiken und Hauptpunkten bekannte System der Fundamentaltripel dessen totalen Charakter.

Denn dadurch, dafs in einem von dem singulären unendlichen wenig verschiedenen allgemeinen Systeme mehrere Fundamentaltripel singulär werden, wird weder die Charakteristik noch der Hauptpunkt eines allgemein bleibenden Tripels verändert.

---

§ 11. Beschreibung einer allgemeinen Punktegruppe $\mathfrak{P}_n$ aus dem Systeme ihrer Fundamentaltripel.

Die Lösung des in § 9 behandelten Problemes, inwieweit eine allgemeine Punktegruppe $\mathfrak{P}_6$ durch das System ihrer Fundamentaltripel bestimmt sei, gliederte sich in folgende Abschnitte:

1) in die Aufstellung aller derjenigen aus sechs gegebenen Elementen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$$

zu bildenden Combinationen von Tripeln, welche den in § 7 angegebenen formalen Eigenschaften einer Verkettung von Fundamentaltripeln in einem Punktsysteme entsprechen;

2) in die Ermittelung derjenigen unter allen so resultierenden Combinationen, welche ein Schema

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_6)$$

von dem formalen Charakter eines Indexsystemes definieren;

3) in den Nachweis, dafs die Verschiedenartigkeit zweier Indexsysteme derselben Verkettung von Fundamentaltripeln rücksichtlich der ihnen zugeordneten Charakteristiken — und Hauptpunktreihen letzterer für mindestens ein Paar entsprechender Tripel entweder entgegengesetzte Charakteristiken, oder veränderte Hauptpunkte, oder beide Unterschiede zugleich bedingen.

Es ergab sich, dafs ein beliebiges allgemeines Punktsystem $\mathfrak{P}_6$ unzweideutig charakterisiert ist, wenn das System seiner Fundamentaltripel **vollständig** beschrieben ist.

Diese Methode bietet zwar einerseits den Vorteil, alle in der Ebene möglichen inäquivalenten Verteilungen von sechs Punkten kennen zu lernen, birgt aber andererseits den Nachteil, die genaue Kenntnis jeder einzelnen Verteilung als notwendige Vorbedingung eines Schlusses zu verlangen, welcher sich auf eine alle unterschiedenen Punktsysteme gleichmäfsig betreffende allgemeine Eigenschaft bezieht.

In dem Falle eines Punktsystemes $\mathfrak{P}_n$ wird deshalb die Frage nach der allgemeinen Bedeutung der Fundamentaltripel an erster Stelle und unabhängig von dessen verschiedenen Erscheinungsformen zu behandeln sein. Damit treten aber ganz neue Gesichtspunkte in den Vordergrund, in deren Verfolg auch neue Untersuchungsmethoden zur Geltung kommen.

In Anbetracht der über die Punktsysteme $\mathfrak{P}_6$ abgeleiteten Sätze wird man die streitige Hauptfrage a priori so formulieren:

1) Stimmen zwei allgemeine Punktesysteme

$$\mathfrak{P}_n' \equiv \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_n'' \equiv \mathfrak{p}_1'',\ \mathfrak{p}_2'',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n''$$

mit korrespondierenden Fundamentaltripeln

$$\mathfrak{p}_{i_h}',\ \mathfrak{p}_{k_h}',\ \mathfrak{p}_{l_h}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{i_h}'',\ \mathfrak{p}_{k_h}'',\ \mathfrak{p}_{l_h}''$$
$$(h = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \nu)$$

von gleichen Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_{i_h}',\ \mathfrak{p}_{k_h}',\ \mathfrak{p}_{l_h}') = c(\mathfrak{p}_{i_h}'',\ \mathfrak{p}_{k_h}'',\ \mathfrak{p}_{l_h}'')$$

und entsprechenden Hauptpunkten

$$\mathfrak{p}_{i_h}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{i_h}''$$

allgemein auch in den Indices korrespondierender Elemente überein?

Dieselbe entscheidet sich offenbar zugleich mit der anderen:

2) Besitzen zwei allgemeine Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n' \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_n' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_n'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \ldots, \mathfrak{p}_n''$$

mit den Indexsystemen

$$\begin{aligned}
'J(\mathfrak{p}_1') &= \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2}', \mathfrak{p}_{a_3}', \ldots, & 'J(\mathfrak{p}_1'') &= \mathfrak{p}_{\alpha_1}'', \mathfrak{p}_{\alpha_2}'', \mathfrak{p}_{\alpha_3}'', \ldots,\\
'J(\mathfrak{p}_2') &= \mathfrak{p}_{b_1}', \mathfrak{p}_{b_2}', \mathfrak{p}_{b_3}', \ldots, & 'J(\mathfrak{p}_2'') &= \mathfrak{p}_{\beta_1}'', \mathfrak{p}_{\beta_2}'', \mathfrak{p}_{\beta_3}'', \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots,\\
'J(\mathfrak{p}_n') &= \mathfrak{p}_{r_1}', \mathfrak{p}_{r_2}', \mathfrak{p}_{r_3}', \ldots, & 'J(\mathfrak{p}_n'') &= \mathfrak{p}_{\varrho_1}'', \mathfrak{p}_{\varrho_2}'', \mathfrak{p}_{\varrho_3}'', \ldots,
\end{aligned}$$

wo unter allgemeiner Annahme gleicher Suffixe

$$a_1 = \alpha_1, \quad b_1 = \beta_1, \ldots, \quad r_1 = \varrho_1$$

für die Anfangselemente entsprechender Indices in mindestens einem Paare solcher

$$'J(\mathfrak{p}_k') \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_k'')$$

zwei an entsprechenden Stellen stehende Elemente

$$\mathfrak{p}_{k_h}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{\varkappa_h}''$$

verschiedene Suffixe aufweisen

$$i_h \neq \varkappa_h,$$

stets ein Paar korrespondierender Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i'', \mathfrak{p}_k'', \mathfrak{p}_l'',$$

welche entweder in den Charakteristiken, oder in den Hauptpunkten, oder in den einen wie in den anderen differieren?

In der That wird eine Bejahung bezw. Verneinung der zweiten auch eine Bejahung bezw. Verneinung der ersten Frage involvieren.

Die Behandlung des Problemes in der zweiten Fassung verlangt je nach den Verschiedenheiten der verglichenen Indexsysteme auch veränderte Schlufsweisen, und zwar unterscheidet sie die beiden Hauptfälle:

1) wo alle Unterschiede in den Elementefolgen entsprechender Indices lediglich aus dem Wechsel der Drehungsrichtungen entspringen,

2) wo besagte Unterschiede für mindestens ein Paar entsprechender Indices

$$'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_{k_1}', \mathfrak{p}_{k_2}', \mathfrak{p}_{k_3}', \ldots \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_k'') = \mathfrak{p}_{\varkappa_1}'', \mathfrak{p}_{\varkappa_2}'', \mathfrak{p}_{\varkappa_3}'', \ldots$$
$$(i_1 = \varkappa_1)$$

unabhängig von deren Drehungssinn gelten, so dafs weder die Gleichung

$$k_h = \varkappa_h$$

noch die andere

$$k_h = \varkappa_{n+2-h}$$

für jedes beliebige h erfüllt ist.

Der erste Fall erledigt sich leicht mit Hülfe des folgenden allgemeinen Satzes:

Wenn für zwei Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n' \equiv \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_n' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_n'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \ldots, \mathfrak{p}_n''$$

die Indices entsprechender Punkte

$$\mathfrak{p}_h' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_h''$$

der Gruppen

$$\mathfrak{P}_m' \equiv \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_m' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_m'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \ldots, \mathfrak{p}_m''$$

ganz analog gebildet sind,

$$'J(\mathfrak{p}_h') = \mathfrak{p}_{h_1}', \mathfrak{p}_{h_2}', \mathfrak{p}_{h_3}', \ldots \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_h'') = \mathfrak{p}_{h_1}'', \mathfrak{p}_{h_2}'', \mathfrak{p}_{h_3}'', \ldots,$$

und wenn die Indices entsprechender Elemente

$$\mathfrak{p}_i' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i''$$

der restierenden Gruppen

$$\mathfrak{P}_{n-m}' \equiv \mathfrak{p}_{m+1}', \ldots, \mathfrak{p}_n' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_{n-m}'' \equiv \mathfrak{p}_{m+1}'', \ldots, \mathfrak{p}_n''$$

sich nur im Drehungssinn unterscheiden,

$$'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}', \mathfrak{p}_{i_3}', \ldots \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_i'') = \ldots, \mathfrak{p}_{i_3}'', \mathfrak{p}_{i_2}'', \mathfrak{p}_{i_1}'',$$

so giebt es in den Ebenen der beiden Punktsysteme allemal zwei Geraden

$$g' \quad \text{und} \quad g'',$$

welche dieselben in resp. die Gruppen teilen:

$$\mathfrak{P}_m' \,|\, \mathfrak{P}_{n-m}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_m'' \,|\, \mathfrak{P}_{n-m}''.$$

Der Beweis stützt sich auf die in § 9 gefundenen Hülfssätze:

1) dafs je zwei Punkte

$$\mathfrak{p}_h', \mathfrak{p}_i' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}_h'', \mathfrak{p}_i''$$

$$(h = 1, 2, \cdots, m, \quad i = m+1, m+2, \cdots, n)$$

aufserhalb der durch je drei Punkte aus resp. den Gruppen

$$\mathfrak{P}_{n-m}', \mathfrak{P}_m' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{P}_{n-m}'', \mathfrak{P}_m''$$

bestimmten endlichen Dreiecksflächen liegen;

2) dafs je zwei endliche Strecken

$|\mathfrak{p}_{h_1}', \mathfrak{p}_{h_2}'|_1$ und $|\mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}'|_1$ bezw. $|\mathfrak{p}_{h_1}'', \mathfrak{p}_{h_2}''|_1$ und $|\mathfrak{p}_{i_1}'', \mathfrak{p}_{i_2}''|_1$

einander nicht schneiden.

Zufolge derselben können die den Gruppen

$$\mathfrak{P}_m' \text{ und } \mathfrak{P}_{n-m}' \text{ bezw. } \mathfrak{P}_m'' \text{ und } \mathfrak{P}_{n-m}''$$

zugehörigen Aufsenpolygone

$$P_1' \text{ und } P_2' \text{ bezw. } P_1'' \text{ und } P_2''$$

kein gemeinsames Flächenstück besitzen. Es mufs alsdann das eine ganz aufserhalb des anderen liegen, so dafs beide durch eine Gerade getrennt werden können. Q. e. d.

Nun kann man das Punktsystem $\mathfrak{P}_n'$ unter Erhaltung seiner Fundamentaltripel dadurch stetig in ein dem Systeme $\mathfrak{P}_n''$ isothetisches Ω_n überführen, dafs man das Punktsystem $\mathfrak{P}_n'$ aus einem aufserhalb seiner Ebene E' liegenden Punkte o durch ein Strahlensystem Σ_n' projeciert, darauf in E' zur Geraden g' jenseits der Gruppe $\mathfrak{P}_m'$ eine Parallele g_1' zieht und endlich um letztere als Achse eine veränderliche Ebene samt ihrem Durchschnittsysteme mit Σ_n' aus der Lage E' auf passende Weise d. h. ohne o zu passieren, bis in eine zur Ebene $[g', o]$ parallele Lage E bringt.

Während dieser Überführung erfahren aber alle die Gruppen

$$\mathfrak{P}_m' \text{ und } \mathfrak{P}_{n-m}'$$

verbindenden Fundamentaltripel eine Änderung ihres Charakters. — Besagte Fundamentaltripel zerfallen nämlich gemäfs der Verteilung ihrer Elemente auf beide Punktgruppen in zwei Arten:

1) in Tripel der Zusammensetzung

$$\mathfrak{p}_{h_1}', \mathfrak{p}_{h_2}', \mathfrak{p}_i',$$

2) in Tripel der Bildung

$$\mathfrak{p}_h', \mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}'.$$

In einem Tripel erster Art tritt der Punkt $\mathfrak{p}_i'$ beim Passieren der unendlich fernen Ebene von der einen auf die andere Seite der Geraden $|\mathfrak{p}_{h_1}', \mathfrak{p}_{h_2}'|$ über, und es gilt daher die Beziehung:

$$c(\mathfrak{p}_{h_1}', \mathfrak{p}_{h_2}', \mathfrak{p}_i') = -c(\mathfrak{q}_{h_1}, \mathfrak{q}_{h_2}, \mathfrak{q}_i).$$

Zugleich verwandeln sich die primären Strahlenbereiche

$$\mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_{h_1}', \mathfrak{p}_{h_2}', \mathfrak{p}_i'; \mathfrak{p}_i' | \mathfrak{p}_{h_1}', \mathfrak{p}_{h_2}'; \mathfrak{p}_{h_1}' | \mathfrak{p}_{h_2}', \mathfrak{p}_i'; \mathfrak{p}_{h_2}' | \mathfrak{p}_{h_1}', \mathfrak{p}_i'$$

in resp. die anderen:

$$\mathfrak{q}_i | \mathfrak{q}_{h_1}, \mathfrak{q}_{h_2}; \mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{q}_{h_1}, \mathfrak{q}_{h_2}, \mathfrak{q}_i; \mathfrak{q}_{h_2} | \mathfrak{q}_{h_1}, \mathfrak{q}_i; \mathfrak{q}_{h_1} | \mathfrak{q}_{h_2}, \mathfrak{q}_i.$$

Bei einem Tripel zweiter Art bleibt zwar die Charakteristik dieselbe, dagegen wechselt es seinen Hauptpunkt, und zwar korrespondieren den vier Primärbereichen

$$\mathfrak{p}_\infty | \mathfrak{p}_h', \mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}'; \mathfrak{p}_h' | \mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}'; \mathfrak{p}_{i_1}' | \mathfrak{p}_h', \mathfrak{p}_{i_2}'; \mathfrak{p}_{i_2}' | \mathfrak{p}_h', \mathfrak{p}_{i_1}'$$

resp. die vier anderen:

$$\mathfrak{q}_h \,|\, \mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2};\ \mathfrak{p}_\infty \,|\, \mathfrak{q}_h, \mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2};\ \mathfrak{q}_{i_2} \,|\, \mathfrak{q}_h, \mathfrak{q}_{i_1};\ \mathfrak{q}_{i_1} \,|\, \mathfrak{q}_h, \mathfrak{q}_{i_2}.$$

Man bemerkt nämlich mit Bezug auf ein Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_{x'}, \mathfrak{p}_{y_1'}, \mathfrak{p}_{y_2'}$$

der einen wie der anderen Art, dafs, falls g eine Gerade des Bereiches $\mathfrak{p}_{y_1'} \,|\, \mathfrak{p}_{x'}, \mathfrak{p}_{y_2'}$ darstellt, die Ebene E von den Strahlen

$$|\mathfrak{o}, \mathfrak{p}_{x'}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{o}, \mathfrak{p}_{y_1'}|$$

auf der einen, von der Geraden

$$|\mathfrak{o}, \mathfrak{p}_{y_2'}|$$

auf der anderen Seite ihrer Schnittlinie mit der Ebene $[\mathfrak{o}, g']$ getroffen wird.

Indem man die für das sechspunktige System eingeführten Begriffe äquivalenter und isothetischer Punktegruppen allgemein anwendet, wird man den Satz formulieren:

In zwei äquivalenten aber nicht isothetischen Punktegruppen

$$\mathfrak{P}_n' \equiv \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_n' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_n'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \ldots, \mathfrak{p}_n''$$

giebt es mindestens ein Paar entsprechender Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i'', \mathfrak{p}_k'', \mathfrak{p}_l'',$$

welche entweder in den Charakteristiken nicht übereinstimmen oder doch in den Hauptpunkten nicht korrespondieren.

Gleichzeitig findet man als Verallgemeinerung eines zweiten in § 9 bewiesenen Satzes das wichtige

Theorem 12: Ist unter den $2^{(n)}$ formal bestimmten Indexsystemen

$$J(\mathfrak{p}_1), J(\mathfrak{p}_2), \ldots, J(\mathfrak{p}_n)$$

irgend eines realisierbar durch ein Punktsystem

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n,$$

so kommt diese Eigenschaft allemal noch ebensovielen anderen zu, als eine in der Ebene von $\mathfrak{P}_n$ bewegte Gerade verschiedene Lagen zu letzteren annehmen kann.

Weit schwieriger als der erste ist der zweite Teil der gestellten Frage zu entscheiden. Es erscheint deshalb zweckmäfsig, einige allgemeine Betrachtungen vorauszuschicken.

Das rücksichtlich des ersten Teiles erhaltene Resultat läfst betreffs der in Hinsicht auf den zweiten zu gewärtigenden Antwort keinen Zweifel. Man wird sich von vorneherein die Aufgabe stellen, nachzuweisen, dafs durch die Inäquivalenz der Indexsysteme

$$'J(\mathfrak{p}_h') \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_h'')$$
$$(h = 1, 2, \cdots, n)$$

zweier allgemeinen Punktegruppen

$$\mathfrak{P}_n' \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_n''$$

stets auch die Inäquivalenz der Systeme ihrer Fundamentaltripel bedingt ist. Dieser Zusammenhang mufs aber in dem Mafse klarer hervortreten, als es gelingt, die charakteristischen Abweichungen der beiden Indexsysteme von einander zu analysieren.

Bekanntlich ändert ein Punktsystem $\mathfrak{P}_n$ bei stetigen Bewegungen seiner Elemente den Charakter nur in zwei Fällen:

1) wenn ein Punkt $\mathfrak{p}_i$ die unendlich ferne Gerade passiert,

2) wenn die Elemente eines Fundamentaltripels aus der allgemeinen durch die lineale wieder in die allgemeine Lage übergehen, d. h. wenn ein Fundamentaltripel eine Inversion erfährt.

Im ersten Falle wird die Änderung eine uneigentliche, im zweiten eine eigentliche genannt.

Aus jeder stetigen und endlichen Translation zweier derselben Ebene angehörigen inäquivalenten Punktegruppen in einander, von denen die eine als beweglich, die andere als fest gedacht wird, kann man eine Verbindung ableiten

$$\mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}_n', \mathfrak{P}_n'', \ldots, \mathfrak{P}_n^{(m)}, \overline{\mathfrak{P}}_n,$$

in welcher je zwei benachbarte Gruppen durch die Inversion eines einzigen Fundamentaltripels unterschieden sind. Wenn beispielsweise die Punkte

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

successive auf den endlichen Strecken

$$|\mathfrak{p}_1, \overline{\mathfrak{p}}_1|_1, \quad |\mathfrak{p}_2, \overline{\mathfrak{p}}_2|_1, \ldots, \quad |\mathfrak{p}_n, \overline{\mathfrak{p}}_n|_1$$

stetig in die anderen übergehen

$$\overline{\mathfrak{p}}_1, \overline{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{p}}_n,$$

wird man mit jedem dabei erfolgenden Durchgange eines Punktes $\mathfrak{p}_i$ durch eine Gerade $|\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l|$ aus dem jeweiligen Zwischensysteme $\mathfrak{P}_n^{(h)}$ in das nächstfolgende $\mathfrak{P}_n^{(h+1)}$ gelangen.

Der Inversion eines Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}_l$ von $\mathfrak{P}_n$ entspricht als einfachste Änderung in dem zugehörigen Indexsysteme die Permutation je zweier der drei Elemente $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}_l$ in respektive den Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i), \quad 'J(\mathfrak{p}_k), \quad 'J(\mathfrak{p}_l).$$

Es soll dieser Prozess als ein irreducibeler oder als Elementwechsel schlechthin bezeichnet werden.

Demnach ergiebt sich als natürliche Quelle der gesuchten Analyse die Lösung der Aufgabe:

Aus den formalen Verschiedenheiten zweier gegebenen Indexsysteme

$$\text{I}'. \ 'J_1(\mathfrak{p}_1), 'J_1(\mathfrak{p}_2), \ldots, 'J_1(\mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad \text{I.} \ 'J(\mathfrak{p}_1), 'J(\mathfrak{p}_2), \ldots, 'J(\mathfrak{p}_n)$$

eine Folge von nacheinander möglichen Elementwechseln abzuleiten, welche das erste in das zweite umformen.

Dieses Problem führt in allen Phasen seiner Behandlung auf die Grundoperation der entsprechenden Umwandlung eines beliebigen in ein Fundamentaltripel, welche ihrerseits auf gewissen aus den Bildungsgesetzen des Indexsystemes zu folgernden allgemeinen Bestimmungsweisen solcher Tripel beruht.

Als erstes Ziel bietet sich die Überführung eines Index von I′ auf die durch den entsprechenden Index von I gegebene Form.

Angenommen, die Indices

$$'J_1(\mathfrak{p}_1) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_1)$$

zeigen die differierenden Darstellungen:

$$'J_1(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_{a-1}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_a, \cdots$$

und

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_{a-1}, \mathfrak{p}_a, \ldots, \mathfrak{p}_n,$$

so bestehen in dem Systeme I′ nach Theorem (6) auch die anderen:

$$J_1(\mathfrak{p}_a) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_{a_1}, \ldots,$$

$$J_1(\mathfrak{p}_{a_1}) = \mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha, \mathfrak{p}_a, \ldots,$$

wo die beiden Reihen

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha$$

dieselben α Elemente $\mathfrak{p}_t$ umfassen.

Es sei

$$\mathfrak{q}_\alpha \equiv \bar{\mathfrak{q}}_\beta \equiv \mathfrak{p}_{a_2} \cdot —$$

Indem man für die Elemente

$$\bar{\mathfrak{q}}_{\beta+1},\ \bar{\mathfrak{q}}_{\beta+2},\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{q}}_{\alpha}$$

respektive die neuen Benennungen einführt

$$\mathfrak{r}_{\alpha_1},\ \mathfrak{r}_{\alpha_1-1},\ \ldots,\ \mathfrak{r}_1,$$

schliefst man aus den Indices

$$J_1(\mathfrak{p}_a) = \mathfrak{p}_{a_2},\ \mathfrak{p}_{a_1},\ \ldots \quad \text{und} \quad J_1(\mathfrak{p}_{a_1}) = \mathfrak{p}_a,\ \mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_{\alpha_1},\ \mathfrak{p}_{a_2},\ \ldots$$

auf den Index:

$$J_1(\mathfrak{p}_{a_2}) = \mathfrak{p}_a,\ \bar{\mathfrak{r}}_1,\ \bar{\mathfrak{r}}_2,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{r}}_{\alpha_1},\ \mathfrak{p}_{a_1},\ \ldots.$$

Es sei

$$\mathfrak{r}_{\alpha_1} \equiv \bar{\mathfrak{r}}_{\beta_1} \equiv \mathfrak{p}_{a_2}. \quad —$$

Indem man den Elementen

$$\bar{\mathfrak{r}}_{\beta_1+1},\ \bar{\mathfrak{r}}_{\beta_1+2},\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{r}}_{\alpha_1}$$

respektive die neuen Bezeichnungen beilegt

$$\mathfrak{f}_{\alpha_2},\ \mathfrak{f}_{\alpha_2-1},\ \ldots,\ \mathfrak{f}_1,$$

folgert man aus den Indices

$$J_1(\mathfrak{p}_{a_1}) = \mathfrak{p}_{a_3},\ \mathfrak{p}_{a_2},\ \ldots \quad \text{und} \quad J_1(\mathfrak{p}_{a_2}) = \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{f}_1,\ \mathfrak{f}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{f}_{\alpha_2},\ \mathfrak{p}_{a_3},\ \ldots$$

den dritten:

$$J_1(\mathfrak{p}_{a_3}) = \mathfrak{p}_{a_1},\ \bar{\mathfrak{f}}_1,\ \bar{\mathfrak{f}}_2,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{f}}_{\alpha_2},\ \mathfrak{p}_{a_2},\ \ldots.$$

Diese Schlufsweise kann man offenbar so lange fortsetzen, bis in der unzweideutig bestimmten absteigenden Reihe positiver ganzer Zahlen

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_\lambda$$

die zuletzt resultierende Gröfse α_λ den Wert 1 annimmt. Alsdann besteht das Schema:

$$J_1(\mathfrak{p}_a) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_{\alpha-1},\ \mathfrak{p}_{a_2},\ \mathfrak{p}_{a_1},\ \ldots,$$

$$J_1(\mathfrak{p}_{a_1}) = \mathfrak{p}_a,\ \mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_{\alpha_1-1},\ \mathfrak{p}_{a_3},\ \mathfrak{p}_{a_2},\ \ldots,$$

$$J_1(\mathfrak{p}_{a_2}) = \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{f}_1,\ \mathfrak{f}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{f}_{\alpha_2-1},\ \mathfrak{p}_{a_4},\ \mathfrak{p}_{a_3},\ \ldots,$$

$$J_1(\mathfrak{p}_{a_3}) = \mathfrak{p}_{a_2},\ \mathfrak{t}_1,\ \mathfrak{t}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{t}_{\alpha_3-1},\ \mathfrak{p}_{a_4},\ \mathfrak{p}_{a_3},\ \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$J_1(\mathfrak{p}_{a_{\lambda-1}}) = \mathfrak{p}_{a_{\lambda-2}},\ \mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{x}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{x}_{\substack{\alpha-1 \\ \lambda-1}},\ \mathfrak{p}_{a_{\lambda+1}},\ \mathfrak{p}_{a_\lambda},\ \ldots,$$

$$J_1(\mathfrak{p}_{a_\lambda}) = \mathfrak{p}_{a_{\lambda-1}},\ \mathfrak{p}_{a_{\lambda+2}},\ \mathfrak{p}_{a_{\lambda+1}},\ \ldots,$$

$$J_1(\mathfrak{p}_{a_{\lambda+1}}) = \mathfrak{p}_{a_{\lambda-1}},\ \mathfrak{p}_{a_{\lambda+2}},\ \mathfrak{p}_{a_\lambda},\ \ldots,$$

wo in der Komplexionenreihe

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha \equiv \mathfrak{p}_{a_2}; \quad \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_{\alpha_1} \equiv \mathfrak{p}_{a_3}; \quad \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_{\alpha_2} \equiv \mathfrak{p}_{a_4};$$
$$\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots, \mathfrak{t}_{\alpha_3} \equiv \mathfrak{p}_{a_5}; \ldots; \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{a_{\lambda-1}} \equiv \mathfrak{p}_{a_{\lambda+1}};$$
$$\mathfrak{z}_1 \equiv \mathfrak{z}_{a_\lambda} \equiv \mathfrak{p}_{a_{\lambda+2}}$$

jede folgende einen Bestandteil der vorangehenden bildet.

Es zeigen aber die Formen der beiden letzten Indices

$$J_1(\mathfrak{p}_{a_\lambda}) \quad \text{und} \quad J_1(\mathfrak{p}_{a_{\lambda+1}}),$$

dafs die Elemente

$$\mathfrak{p}_{a_\lambda}, \quad \mathfrak{p}_{a_{\lambda+1}}, \quad \mathfrak{p}_{a_{\lambda+2}}$$

ein Fundamentaltripel bestimmen.

Diese allgemeine, stets mögliche, rein formale Bestimmungsmethode des letzteren bietet die notwendigen und hinreichenden Mittel, eine Succession von Fundamentaltripeln aufzustellen, durch deren in entsprechender Folge auszuführende Inversionen der Stellenwechsel zweier benachbarten Elemente eines Index bewirkt wird.

Denn gesetzt, man habe mit Hülfe derselben rücksichtlich dreier Indices der Formen

$$J(\mathfrak{p}_a) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha \equiv \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_{a_1}, \ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_{a_1}) = \mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{r}_{\alpha_1}, \ldots, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{p}_a, \ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_{a_2}) = \mathfrak{p}_a, \bar{\mathfrak{r}}_1, \bar{\mathfrak{r}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{r}}_{\alpha_1}, \mathfrak{p}_{a_1}, \ldots$$

für jeden Wert

$$\alpha_1 = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$$

allgemein die Existenz einer aus den Elementen

$$\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_{\alpha_1}, \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_{a_1}$$

gebildeten Succession von Tripeln nachgewiesen

$$\mathfrak{T}_1 \equiv \mathfrak{p}_{a_\lambda}, \mathfrak{p}_{a_{\lambda+1}}, \mathfrak{p}_{a_{\lambda+2}}; \quad \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3, \ldots, \mathfrak{T}_\mu,$$

durch deren in entsprechender Folge vollzogenen Inversionen die Indices resultieren:

$$J(\mathfrak{p}_{a_1}) = \mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_{\alpha-1}, \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_a, \ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_{a_2}) = \mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_{a_1}, \ldots,$$

so liefert die Inversion des dadurch entstandenen Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{a_2}$$

die neuen Indices:

$$J(\mathfrak{p}_a) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha-1}, \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{a_2}, \ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_{a_1}) = \mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_{\alpha-1}, \mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_{a_2}, \ldots,$$

während der Index $J_1(\mathfrak{p}_1)$ ungeändert bleibt,

$$J_1(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_{a-1}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_a, \ldots.$$

Nach der getroffenen Voraussetzung läfst sich dann aber eine aus den Elementen

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha-1}, \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_a$$

gebildete Folge von nacheinander hervortretenden Fundamentaltripeln angeben

$$\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_\nu',$$

durch deren successive Inversionen, wiederum ohne Änderung von $J_1(\mathfrak{p}_1)$, zunächst die Indices entstehen:

$$J(\mathfrak{p}_a) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_1}, \ldots \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_{a_1}) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_a, \ldots.$$

Die darauf erfolgende Inversion des neuen Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_{a_1}$$

läfst den Index $J_1(\mathfrak{p}_1)$ in die Form übergehen:

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_{a-1}, \ldots, \mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_{a_1}, \ldots.$$

Die Transformation eines Index

$$'J_1(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_{a-1}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_3}, \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_a, \ldots$$

auf die Form

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_{a-1}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_3}, \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_{a_1}, \ldots$$

bezw. auf die andere

$$'\bar{J}(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_{a-1}, \mathfrak{p}_a, \ldots$$

durch ausschliefsliche Inversionen von Fundamentaltripeln ist hiernach bedingungslos ausführbar, wenn sie unter der speziellen Voraussetzung

$$\alpha_1 = \alpha_\lambda = 1$$

vollzogen werden kann.

Für diesen Fall hat man indessen die Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_a, \ldots;$$

$$J(\mathfrak{p}_a) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}_{a_1}, \ldots; \quad J(\mathfrak{p}_{a_1}) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}_a, \ldots;$$

und es liefern demgemäfs die successiven Inversionen zunächst des Fundamentaltripels

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_{a_1}$$

und darauf des anderen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_{a_1}$$

den geforderten Index

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_{a_1}, \ldots.$$

Den vorstehenden Umformungsprozefs durch ein Beispiel zu erläutern, diene das Indexsystem:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5; \quad 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1;$$
$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;$$
$$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad 'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4;$$
$$'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4.$$

Dasselbe entspricht einer Punktegruppe $\mathfrak{P}_7$, gebildet aus den fünf Punkten der positiven Folge

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

und zwei Punkten

$$\mathfrak{p}_6 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_7$$

innerhalb der von respektive den zweimal drei Geraden

$$|\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1|, |\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4|, |\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5|, |\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3|, |\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4|$$

eingeschlossenen endlichen Flächen.

Es ist die Aufgabe, den Index

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5$$

zu transformieren in den anderen

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7.$$

Der Stellenwechsel der Elemente $\mathfrak{p}_6$ und $\mathfrak{p}_1$ folgt aus der Inversion des Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$. Dieselbe liefert:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5, \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3,$$
$$'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1.$$

Um weiter in $'J(\mathfrak{p}_1)$ die Elemente $\mathfrak{p}_5$ und $\mathfrak{p}_7$ zu vertauschen, führe man gemäfs den Indices

$$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4 \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$$

erst die Inversion des Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_2$ und dann diejenige des neuen $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6$ aus. Dadurch findet man:

$$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \quad 'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$$

und

$$'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \quad 'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1.$$

Die folgende Inversion des Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7$ ergiebt:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \quad 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4,$$
$$'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4.$$

Endlich bestimmt die Inversion des Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$ die Indices:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \quad 'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4,$$
$$'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5.$$

Das ursprüngliche Indexsystem

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5, \quad 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1,$$
$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3,$$
$$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \quad 'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4,$$
$$'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$$

geht also vermöge der successiven Inversionen der nach einander entstehenden Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_2; \quad \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$$

in das andere über:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \quad 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1,$$
$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3,$$
$$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \quad 'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5,$$
$$'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4.$$

Aus dem oben angegebenen Bestimmungsverfahren eines Fundamentaltripels läfst sich durch eine geringe Modifikation das schon früher § 7 Ermittelte ableiten.

Unabhängig von dem Drehungssinne des einzelnen Index findet man ausgehend von der Gruppe der Indices

$$1) \quad J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i, \ldots,$$

$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k_1}, [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha-1}], \mathfrak{p}_1, [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\beta],$$
$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_1}], \mathfrak{p}_{k_1}, [\mathfrak{q}_{\alpha_1+1}, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha-1}], \mathfrak{p}_1, [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\beta]_1$$

successive die weiteren:

$$2) \quad J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_i, \ldots,$$

$$J(\mathfrak{p}_{k_1}) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k_2}, [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_1-1}], \mathfrak{p}_k, \ldots,$$

$$3) \quad J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_{k_1}, [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_2}], \mathfrak{p}_{k_2}, [\mathfrak{q}_{\alpha_2+1}, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_1-1}], \mathfrak{p}_k, \ldots;$$

$$4) \quad J(\mathfrak{p}_{k_1}) = \mathfrak{p}_{k_2}, \mathfrak{p}_i, \ldots,$$

$$J(\mathfrak{p}_{k_2}) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k_3}, [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_2-1}], \mathfrak{p}_{k_1}, \ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_{k_2}, [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_3}], \mathfrak{p}_{k_3}, \ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\lambda) \quad J(\mathfrak{p}_{k_{\lambda-2}}) = \mathfrak{p}_{k_{\lambda-1}}, \mathfrak{p}_i, \ldots,$$

$$J(\mathfrak{p}_{k_{\lambda-1}}) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k_\lambda}, [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_{\lambda-1}^{-1}}], \mathfrak{p}_{k_{\lambda-2}}, \ldots,$$

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_{k_{\lambda-1}}, \mathfrak{p}_{k_\lambda}, [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha_{\lambda-1}^{-1}}]_1, \mathfrak{p}_{k_{\lambda-2}}, \ldots.$$

Man gelangt also schliefslich zu einem Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k_{\lambda-1}}, \mathfrak{p}_{k_\lambda}.$$

Aus vorstehendem Schema bestimmen sich gemäfs den Ausführungen des § 7 successive die Indices:

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k_2}, \mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_1, \qquad J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{k_2}, \mathfrak{p}_1,$$

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k_2}, \mathfrak{p}_{k_3}, \mathfrak{p}_1, \qquad J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k_3}, \mathfrak{p}_{k_2}, \mathfrak{p}_1,$$

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k_4}, \mathfrak{p}_{k_3}, \mathfrak{p}_1, \qquad J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k_3}, \mathfrak{p}_{k_4}, \mathfrak{p}_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

a) $J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k_{\lambda-1}}, \mathfrak{p}_{k_\lambda}, \mathfrak{p}_1, \qquad J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k_\lambda}, \mathfrak{p}_{k_{\lambda-1}}, \mathfrak{p}_1,$

b) $J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k_\lambda}, \mathfrak{p}_{k_{\lambda-1}}, \mathfrak{p}_1, \qquad J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{k_{\lambda-1}}, \mathfrak{p}_{k_\lambda}, \mathfrak{p}_1.$

Man erkennt ferner, dafs der Index irgend eines Elementes der Gruppe

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha$$

allemal die Form hat:

$$J(\mathfrak{q}_h) = \mathfrak{p}_i, \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_{\alpha_1}, \mathfrak{p}_k, \ldots,$$
$$(0 = < \alpha_1 \quad < = \alpha - 1)$$

und dafs dann die Indices gelten:

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{q}_h, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_{h_1}, \ldots, \mathfrak{p}_k, \ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_{h_1}, \ldots, \mathfrak{q}_h, \ldots, \mathfrak{p}_i, \ldots,$$
$$h_1 = 1, 2, \ldots, \alpha_1.$$

Weil aber nach dem eben beschriebenen Verfahren die Coexistenz dreier Indices der Form

$$J(\mathfrak{q}_h) = \mathfrak{p}_i, \bar{\mathfrak{q}}_1, \ldots,$$
$$J(\bar{\mathfrak{q}}_1) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha'}', \mathfrak{q}_h, \ldots, \quad J(\mathfrak{p}_i) = \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_1', \bar{\mathfrak{q}}_2', \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_{\alpha'}', \mathfrak{q}_h, \ldots$$

das gleichzeitige Auftreten eines Fundamentaltripels bedingt und zwar der Bildung

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_{i_1}', \mathfrak{q}_{i_2}',$$

schliefst man zusammenfassend den Satz:

Je nachdem in den Indices

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_k, \ldots, \quad J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha, \mathfrak{p}_i, \ldots$$

zweier in dem Index eines dritten

$$\mathfrak{p}_1$$

benachbarten Elemente

$$\mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k$$

die aus den nämlichen Elementen gebildeten Anordnungen

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha$$

identisch sind oder es nicht sind, bestimmen die $\alpha + 2$ Elemente

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha$$

1) entweder das einzige Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_\alpha$$

2) oder mindestens zwei Fundamentaltripel der Formen

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_{k_1}, \mathfrak{q}_{k_2}.$$

Es werde der zweite Fall vorausgesetzt. Alsdann kann man durch die Inversionen der beiden Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_{k_1}, \mathfrak{q}_{k_2},$$

oder, falls $\mathfrak{q}_{i_1} \equiv \mathfrak{q}_{k_1}$ und $\mathfrak{q}_{i_2} \equiv \mathfrak{q}_{k_2}$ ist, durch diejenige eines von ihnen, ohne Änderung des Index

$$J(\mathfrak{p}_1)$$

die Indices

$$J(\mathfrak{p}_i) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_k)$$

in Bezug auf die Reihenfolge der Elemente eines jeden Paares

$$\mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_{k_1}, \mathfrak{q}_{k_2}$$

in Übereinstimmung bringen.

Sind die dadurch entstehenden Anordnungen

$$\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_\alpha' \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{q}}_1', \bar{\mathfrak{q}}_2', \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha'$$

wiederum nicht identisch, so führe man die Inversionen der jedenfalls vorhandenen Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_{i_3}, \mathfrak{q}_{i_4} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_{k_3}, \mathfrak{q}_{k_4}$$

bezw. diejenige eines von ihnen aus und setze dieses Verfahren so lange fort, bis die Indices

$$J(\mathfrak{p}_i) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_k)$$

infolge der successiven Inversionen der nach einander hervortretenden Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_{x_1}, \mathfrak{p}_{\mu_1}, \mathfrak{p}_{\nu_1}; \quad \mathfrak{p}_{x_2}, \mathfrak{p}_{\mu_2}, \mathfrak{p}_{\nu_2}; \ldots; \mathfrak{p}_{x_\varrho}, \mathfrak{p}_{\mu_\varrho}, \mathfrak{p}_{\nu_\varrho}$$
$$(x_h = i, k)$$

auf die der ersten Annahme entsprechenden Formen gebracht sind:

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{q}_1^{(\varrho)},\ \mathfrak{q}_2^{(\varrho)},\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha^{(\varrho)},\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_\beta,$$

$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{q}_1^{(\varrho)},\ \mathfrak{q}_2^{(\varrho)},\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha^{(\varrho)},\ \mathfrak{p}_i,\ \bar{\mathfrak{r}}_1,\ \bar{\mathfrak{r}}_2,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{r}}_\beta.$$

Nunmehr kann man durch die successiven Inversionen zunächst des Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{q}_\alpha^{(\varrho)},$$

dann des neu entstehenden

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{q}_{\alpha-1}^{(\varrho)},$$

darauf des neu resultierenden

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{q}_{\alpha-2}^{(\varrho)}$$

und aller folgenden bis inklusive des zuletzt auftretenden

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{q}_1^{(\varrho)}$$

zu dem Fundamentaltripel gelangen:

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_1.$$

Es gilt mithin der Satz:

Theorem 13: Haben die Indices zweier in dem Index eines dritten

$$\mathfrak{p}_1$$

benachbarten Elemente

$$\mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k$$

die Formen:

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_\beta,$$

$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_1,\ \bar{\mathfrak{q}}_1,\ \bar{\mathfrak{q}}_2,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{q}}_\alpha,\ \mathfrak{p}_i,\ \bar{\mathfrak{r}}_1,\ \bar{\mathfrak{r}}_2,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{r}}_\beta,$$

so kann man aus den Elementen

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha$$

allemal eine Reihe von Tripeln herstellen

$$\mathfrak{p}_{x_1},\ \mathfrak{q}_{\mu_1},\ \mathfrak{q}_{\nu_1};\ \mathfrak{p}_{x_2},\ \mathfrak{q}_{\mu_2},\ \mathfrak{q}_{\nu_2};\quad \ldots;\ \mathfrak{p}_{x_\varrho},\ \mathfrak{q}_{\mu_\varrho},\ \mathfrak{q}_{\nu_\varrho};$$

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{q}_\alpha^{(\varrho)};\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{q}_{\alpha-1}^{(\varrho)};\ \ldots;\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{q}_1^{(\varrho)},$$

in welcher das erste von vorneherein und jedes folgende zum mindesten nach den Inversionen aller vorhergehenden ein Fundamentaltripel darstellt. Alsdann lassen die successiven Inversionen aller Tripel der Gruppe schliefslich auch das Tripel

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_1$$

in ein Fundamentaltripel übergehen.

Im besonderen können in den ϱ Tripeln $\mathfrak{p}_{x_h}, \mathfrak{q}_{\mu_h}, \mathfrak{q}_{\nu_h}$ sämtliche Elemente $\mathfrak{p}_{x_h}$ entweder mit $\mathfrak{p}_i$ oder mit $\mathfrak{p}_k$ identifiziert werden.

Die Zahl ϱ bestimmt sich durch die Anzahl der Transpositionen, welche notwendig sind, um die Anordnungen

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha$$

in einander überzuführen. Sie berechnet sich deshalb im Maximum auf

$$\varrho = \frac{1}{2}\alpha \cdot (\alpha - 1).$$

Man erhält einen bemerkenswerten Specialfall des Theorems dadurch, dass man den Elementen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

ein $(n+1)^{\text{tes}}$ adjungiert, in dessen Index die Elemente

$$\mathfrak{p}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2$$

benachbart sind. Es resultiert dann zunächst der Satz:

13a. Je nachdem in zwei Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{q}_3, \mathfrak{q}_4, \ldots, \mathfrak{q}_n \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{q}}_3, \bar{\mathfrak{q}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_n$$

die beiden Elementefolgen

$$\mathfrak{q}_3, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{q}}_3, \bar{\mathfrak{q}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_n$$

verschieden oder identisch sind, giebt es stets entweder mindestens 2 Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{q}_{k_1}, \mathfrak{q}_{k_2}$$

oder die beiden einzigen Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{q}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{q}_n;$$

und weiter der andere:

13b. In jedem gegebenen Indexsysteme ist unter Festhaltung eines Index $'J(\mathfrak{p}_1)$ irgend ein veränderlicher zweiter $'J(\mathfrak{p}_2)$ durch die Inversionen einer gewissen Anzahl ϱ nacheinander hervortretender Fundamentaltripel in den ersten transformierbar und zwar bestimmen sich besagte Fundamentaltripel durch alle Elementepaare

$$\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_k,$$

welche in den beiden Reihen

$$\mathfrak{q}_3, \mathfrak{q}_4, \ldots, \mathfrak{q}_n \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{q}}_3, \bar{\mathfrak{q}}_4, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_n$$

in entgegengesetzter Folge auftreten.

Das Theorem gestattet noch einige für die Folge wichtige Schlüsse. Gegeben seien die 5 Indices

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \ldots,\ (\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k),\ \ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_i,\ldots,\ \mathfrak{p}_k,\ \ldots,$$
$$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_x,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_y,\ \ldots,$$
$$(x,\ y = i,\ k)$$
$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_\beta,$$
$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_1,\ \bar{\mathfrak{q}}_1,\ \bar{\mathfrak{q}}_2,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{q}}_\alpha,\ \mathfrak{p}_i,\ \bar{\mathfrak{r}}_1,\ \bar{\mathfrak{r}}_2,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{r}}_\beta.$$

Enthält dann eine der Reihen

$$\mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_\beta$$

die beiden Elemente

$$\mathfrak{p}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_3,$$

besteht also etwa der Index

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{r}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_\beta,$$

so gilt auch stets der andere:

$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_i,\ \bar{\mathfrak{r}}_1,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{r}}_\beta.$$

In der That resultiert rücksichtlich der Elementengruppe

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k$$

nach dem Bildungsgesetze eines Indexsystemes aus den beiden Indices

$$J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_i$$

entgegen der Voraussetzung der dritte:

$$J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_k.$$

Wenn aber die Anordnungen

$$\mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{q}}_1,\ \bar{\mathfrak{q}}_2,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{q}}_\alpha$$

entweder nur eines der beiden Elemente

$$\mathfrak{p}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_3,$$

oder beide in gleicher Folge aufweisen, kann nach Theorem (13) unter den $\varrho + \alpha$ Tripeln

$$\mathfrak{p}_{x_1},\ \mathfrak{q}_{\mu_1},\ \mathfrak{q}_{\nu_1};\ \ldots;\ \mathfrak{p}_{x_\varrho},\ \mathfrak{q}_{\mu_\varrho},\ \mathfrak{q}_{\nu_\varrho};\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{q}_1^{(\varrho)};\ \ldots;\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{q}_\alpha^{(\varrho)},$$

durch deren successive Inversionen das Tripel $\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k$ in ein Fundamentaltripel übergeführt wird, kein einziges beide Elemente $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3$ enthalten.

Es bleibt daher das Fundamentaltripel $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ während dieser Transformation ungeändert.

Allgemeiner gilt der Zusammenhang:

Theorem 14. Wenn in dem Systeme der zweimal drei Elemente

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

die Indices bestehen:

$$1)\quad J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ (\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l),$$

$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3,\ (\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l), \quad J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ (\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l);$$

$$2)\quad J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ (\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3),$$

$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i,\ (\mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3),\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_1, \quad J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i,\ (\mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3),\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_1,$$

so enthalten die Indices

$$J(\mathfrak{p}_k) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_l)$$

die Elemente

$$\mathfrak{p}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_3$$

stets in gleicher Folge.

Zum Beweise nehme man besagte 2 Indices entgegen der Behauptung in den Formen an:

$$J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_1 \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_1.$$

Gemäfs der Grundeigenschaft eines Indexsystemes bestimmen sich dann die Indices

$$J(\mathfrak{p}_2) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_3)$$

im Widerspruch mit der Voraussetzung durch:

$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_l,\ (\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_l,\ (\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i).$$

Die Kombination des Satzes mit (13) liefert den neuen:

Unterwirft man ein Indexsystem einer nach den Vorschriften von (13) gebildeten Reihe von Inversionen, welche irgend ein Tripel

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

mit zwei in dem Index des dritten benachbarten Elementen in ein Fundamentaltripel überführen, so bleibt jedes aus drei anderen Elementen bestehende Fundamentaltripel als solches erhalten.

Nunmehr sind im Wesentlichen diejenigen Hülfssätze gewonnen, welche es ermöglichen, die Lösung der ursprünglichen Aufgabe der Elementartransformation zweier gegebenen Indexsysteme in einander erfolgreich weiterzuführen. Zu dem Ende werden letztere vorerst noch den folgenden zwei scheinbar einschränkenden Bedingungen unterworfen:

1) dass je vier aus dem einen oder dem anderen Systeme beliebig herausgegriffene Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i),\ 'J(\mathfrak{p}_k),\ 'J(\mathfrak{p}_l),\ 'J(\mathfrak{p}_m),$$

bezogen auf die Partialgruppe

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_m,$$

ein ebenes Punktequadrupel definieren,

2) dass die irgend zwei solchen isolierten Systemen

$$'J(\mathfrak{p}_i),\ 'J(\mathfrak{p}_k),\ 'J(\mathfrak{p}_l),\ 'J(\mathfrak{p}_m) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_i),\ 'J(\mathfrak{p}_k),\ 'J(\mathfrak{p}_l),\ 'J(\mathfrak{p}_{m'})$$

entsprechenden Punktequadrupel

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_{m'}$$

für ihr gemeinsames Tripel

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

gleiche Charakteristiken aufweisen.

Diesen Bedingungen unterliegt offenbar jedes geometrisch-deutige Indexsystem. Sie haben den Zweck, den Begriff der Charakteristik eines Elementetripels festzulegen, welcher für ein rein formal gebildetes Indexsystem keine Bedeutung hat.

Man erkennt leicht, dass mit der ersten zugleich auch die zweite Bedingung erfüllt ist. — Denn angenommen, das Partialsystem

$$'J(\mathfrak{p}_i),\ 'J(\mathfrak{p}_k),\ 'J(\mathfrak{p}_l),\ 'J(\mathfrak{p}_m)$$

definiere die positiv*) elliptische Punktefolge

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_m:$$

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,\ 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m,\ 'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m,\ 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l,$$

das andere System

$$'J(\mathfrak{p}_i),\ 'J(\mathfrak{p}_k),\ 'J(\mathfrak{p}_l),\ 'J(\mathfrak{p}_{m'})$$

dagegen ein Quadrupel mit der negativen Punktefolge

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

gemäfs den unterschiedlichen Schematen:

1) $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_l,\ 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_{m'},\ 'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_i,\ J(\mathfrak{p}_{m'}) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k;$

2) $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_l,\ 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_l,\ 'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_k,\ J(\mathfrak{p}_{m'}) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k;$

3) $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_{m'},\ 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_l,\ 'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{m'},\ J(\mathfrak{p}_{m'}) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l,$

so kommen für das Indexsystem der Elementengruppe

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_m,\ \mathfrak{p}_{m'}$$

*) Im Falle eines hyperbolischen Punktequadrupels bleiben sowohl Untersuchungsmethode als Resultat ungeändert.

die Schemata in Frage:

1) $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$, $'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, (\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m'})$, $'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, (\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m'})$,
$'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$, $J(\mathfrak{p}_{m'}) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k$;

2) $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$, $'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$, $'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m$,
$'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$, $J(\mathfrak{p}_{m'}) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k$;

3) $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, (\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m'})$, $'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$, $'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, (\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m'})$,
$'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$, $J(\mathfrak{p}_{m'}) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$.

Soll eines dieser Schemata einen Bestandteil des gegebenen Indexsystemes darstellen, muss es auch dessen Fundamentalgesetzen genügen. Nach letzteren bestimmen aber die Indices

1) $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$ und $'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, (\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m'})$,

2) $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$ und $'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$,

3) $'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, (\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m'})$ und $'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$

respektive die dritten:

1) $'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{m'}$, 2) $'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, (\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m'})$, 3) $'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_m$,

und diese sind von den entsprechenden der drei Schemata durchweg verschieden.

Die Annahme, dass zwei Indicesgruppen

$'J(\mathfrak{p}_i), 'J(\mathfrak{p}_k), 'J(\mathfrak{p}_l), 'J(\mathfrak{p}_m)$ und $'J(\mathfrak{p}_i), 'J(\mathfrak{p}_k), 'J(\mathfrak{p}_l), 'J(\mathfrak{p}_{m'})$

für ihr gemeinsames Tripel

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$$

verschiedene Charakteristiken involvieren, ist somit illusorisch, d. h. die zweite obige Bedingung ist eine notwendige Konsequenz der ersten. Q. e. d.

Man schliefst unmittelbar weiter:

Die Realisierbarkeit der isolierten Elementequadrupel eines gegebenen Indexsystemes verhält sich jeder Elementartransformation desselben gegenüber invariant.

In der That entspricht einem Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$$

des Indexsystemes in der irgend ein Elementequadrupel

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m$$

darstellenden Punktegruppe gleichfalls ein Fundamentaltripel, dessen geometrische Inversion stets ausführbar ist.

Es war bereits ganz unabhängig von den letzten Festsetzungen gelungen, das System

$$\mathrm{I}' \equiv {}'J_1(\mathfrak{p}_1),\ {}'J_1(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ {}'J_1(\mathfrak{p}_n)$$

durch eine Reihe von Inversionen umzuwandeln in ein anderes

$$\mathrm{I}_1' \equiv {}'J(\mathfrak{p}_1),\ {}'J_{1,1}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ {}'J_{1,1}(\mathfrak{p}_n),$$

welches mit dem Systeme

$$\mathrm{I} \equiv {}'J(\mathfrak{p}_1),\ {}'J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ {}'J(\mathfrak{p}_n)$$

den Index eines Elementes $\mathfrak{p}_1$ gemein hat. Der nächst mögliche Fortschritt besteht darin, aus I_1' unter Erhaltung des Index ${}'\overline{J}(\mathfrak{p}_1)$ ein System elementar abzuleiten, das mit I noch in folgenden Merkmalen übereinstimmt:

1) in den Charakteristiken der durch je 2 benachbarte Elemente des Index ${}'\overline{J}(\mathfrak{p}_1)$ und durch $\mathfrak{p}_1$ selbst bestimmten Tripel,

2) in den unter diesen vorhandenen Fundamentaltripeln,

3) in den Hauptpunkten letzterer.

Nach Früherem ordnen sich in I die Fundamentaltripel des Elementes $\mathfrak{p}_1$ zu einem Schema der Form:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{p}_{a_2};\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_2},\ \mathfrak{p}_{a_3};\ \cdots;\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_{\alpha_1-1}},\ \mathfrak{p}_{a_{\alpha_1}};\\
\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{b_1},\ \mathfrak{p}_{b_2};\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{b_2},\ \mathfrak{p}_{b_3};\ \cdots;\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{b_{\beta_1-1}},\ \mathfrak{p}_{b_{\beta_1}};\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\
\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{r_1},\ \mathfrak{p}_{r_2};\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{r_2},\ \mathfrak{p}_{r_3};\ \cdots;\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{r_{\varrho_1-1}},\ \mathfrak{p}_{r_{\varrho_1}},
\end{gathered}$$

wo dann der Index ${}'\overline{J}(\mathfrak{p}_1)$ selbst gegeben ist durch:

$${}'\overline{J}(\mathfrak{p}_1) \equiv \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{a_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_{\alpha_1}}, \ldots, \mathfrak{p}_{b_1}, \mathfrak{p}_{b_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{b_{\beta_1}}, \ldots, \mathfrak{p}_{r_1}, \mathfrak{p}_{r_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{r_{\varrho_1}}, \ldots.$$

Zur schärferen Unterscheidung des Systemes I′ und der aus ihm abgeleiteten von dem Systeme I seien die Elemente ersterer in allen Phasen der Umwandlung bezeichnet mit

$$\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n'.$$

Der Vergleich entsprechender Tripel der beiden Reihen

$$\begin{gathered}
1)\quad \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{p}_{a_2};\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_2},\ \mathfrak{p}_{a_3};\ \cdots;\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k;\ \cdots,\\
1')\quad \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_{a_1}',\ \mathfrak{p}_{a_2}';\ \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_{a_2}',\ \mathfrak{p}_{a_3}';\ \cdots;\ \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_i',\ \mathfrak{p}_k';\ \cdots
\end{gathered}$$

in den Systemen

$$\mathrm{I} \quad \text{und} \quad \mathrm{I}_1'$$

mag das $(\lambda+1)^{\text{te}}$ Paar

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_i',\ \mathfrak{p}_k'$$

als die ersten charakteristisch verschiedenen Tripel ergeben. Dann transformiere man in dem Systeme I_1' den Index $'J_{1,1}(\mathfrak{p}_k')$ gemäfs dem Satze (13b) in den unveränderten Index $'J(\mathfrak{p}_1')$ und vertausche in den übrigen $n-2$ Indices des entstehenden Systemes die Elemente $\mathfrak{p}_1'$ und $\mathfrak{p}_k'$, eine Operation*), welche den successiven Inversionen von $n-2$ nach einander resultierenden Fundamentaltripeln $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_k'$, $\mathfrak{p}_x'$ gleichkommt. Hierbei wechselt von den drei Indices

$$'\bar{J}(\mathfrak{p}_1'),\ 'J(\mathfrak{p}_i'),\ 'J(\mathfrak{p}_k')$$

des Elemente- oder Punktetripels

$$\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_i',\ \mathfrak{p}_k'$$

lediglich der eine $'J(\mathfrak{p}_i')$ den Drehungssinn, das Tripel selbst also seine Charakteristik.

Da durch diesen Umformungsprozess die ersten λ Tripel der Reihe (1′) nicht alteriert werden, kann man durch höchstens $n-\lambda-2$ malige Wiederholung des Verfahrens das System I_1' in ein anderes $I_{1,1}'$ transformieren, welches mit I in den Charakteristiken der angegebenen $n-1$ Paare korrespondierender Tripel von $\mathfrak{p}_1'$ und $\mathfrak{p}_1$ übereinstimmt.

Zur weiteren Elementartransformation dieses in das gesuchte System bemerke man, dafs die Indices der Elemente

$$\mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{p}_{a_2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{a_1}',\ \mathfrak{p}_{a_2}'$$

zweier entsprechenden charakteristisch gleichen Tripel

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{p}_{a_2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_{a_1}',\ \mathfrak{p}_{a_2}'$$

---

*) Infolge der verlangten Transformation des Index $'J(\mathfrak{p}_k')$ in $'\bar{J}(\mathfrak{p}_1')$ erhält man aus I_1' ein System der Gestalt:

$$'J(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_{n-2}', \quad 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_{n-2}',$$

$$J(\mathfrak{q}_1') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_k', \ldots, \quad J(\mathfrak{q}_2') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_k', \ldots, \ldots, \quad J(\mathfrak{q}_{n-2}') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_k', \ldots.$$

Dasselbe geht durch die Inversionen der nach einander hervortretenden Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{q}_1'; \quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{q}_2'; \quad \ldots; \quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{q}_{n-2}'$$

successive in die anderen über:

1) $'J(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{q}_1', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{q}_2', \mathfrak{q}_3', \ldots, \mathfrak{q}_{n-2}', \quad 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{q}_1', \mathfrak{p}_1', \mathfrak{q}_2', \mathfrak{q}_3', \ldots, \mathfrak{q}_{n-2}',$

$J(\mathfrak{q}_1') = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_1', \ldots, \quad J(\mathfrak{q}_2') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_k', \ldots, \quad J(\mathfrak{q}_3') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_k', \ldots, \ldots;$

2) $'J(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{q}_3', \ldots, \mathfrak{q}_{n-2}', \quad 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \mathfrak{p}_1', \mathfrak{q}_3', \ldots, \mathfrak{q}_{n-2}',$

$J(\mathfrak{q}_1') = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_1', \ldots, \quad J(\mathfrak{q}_2') = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_1', \ldots, \quad J(\mathfrak{q}_3') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_k', \ldots, \ldots;$

$n-2$) $'J(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_{n-2}', \mathfrak{p}_k', \quad 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_{n-2}', \mathfrak{p}_1',$

$J(\mathfrak{q}_1') = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_1', \ldots, \quad J(\mathfrak{q}_2') = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_1', \ldots, \ldots, \quad J(\mathfrak{q}_{n-2}') = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_1', \ldots.$

gemäfs den Annahmen

$$'\bar{J}(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{p}_{a_2},\ \mathfrak{p}_{a_3},\ \ldots \quad \text{und} \quad '\bar{J}(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{p}_{a_1}',\ \mathfrak{p}_{a_2}',\ \mathfrak{p}_{a_3}',\ \ldots$$

notwendig die Formen haben:

*)a) bei positiven Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{p}_{a_2}) = c(\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_{a_1}',\ \mathfrak{p}_{a_2}') = +1:$$

1) $'J(\mathfrak{p}_{a_1}) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_2},\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{p}_{a_2}) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_1},\ \ldots,$

(Fall des Hauptpunktes $\mathfrak{p}_{a_1}$)

2) $'J(\mathfrak{p}_{a_1}) = \mathfrak{p}_{a_2},\ \mathfrak{p}_1,\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{p}_{a_2}) = \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{p}_1,\ \ldots,$

(Fall des Hauptpunktes $\mathfrak{p}_{a_2}$)

1′) $'J(\mathfrak{p}_{a_1}') = \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{q}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha,\ \mathfrak{p}_{a_2}',\ \mathfrak{r}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_\beta,$
$'J(\mathfrak{p}_{a_2}') = \mathfrak{p}_1',\ \bar{\mathfrak{q}}_1,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{q}}_\alpha,\ \mathfrak{p}_{a_1}',\ \bar{\mathfrak{r}}_1,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{r}}_\beta,$

2′) $'J(\mathfrak{p}_{a_1}') = \mathfrak{p}_{a_2}',\ \mathfrak{q}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha,\ \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{r}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_\beta,$
$'J(\mathfrak{p}_{a_2}') = \mathfrak{p}_{a_1}',\ \bar{\mathfrak{q}}_1,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{q}}_\alpha,\ \mathfrak{p}_1',\ \bar{\mathfrak{r}}_1,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{r}}_\beta;$

b) bei negativen Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{p}_{a_2}) = c(\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_{a_1}',\ \mathfrak{p}_{a_2}') = -1:$$

1) $'J(\mathfrak{p}_{a_1}) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_2},\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{p}_{a_2}) = \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{p}_1,\ \ldots,$

(Fall des Hauptpunktes $\mathfrak{p}_1$)

2) $'J(\mathfrak{p}_{a_1}) = \mathfrak{p}_{a_2},\ \mathfrak{p}_1,\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{p}_{a_2}) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_1},\ \ldots,$

(Fall des Hauptpunktes $\mathfrak{p}_\infty$)

1′) $'J(\mathfrak{p}_{a_1}') = \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{q}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha,\ \mathfrak{p}_{a_2}',\ \mathfrak{r}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_\beta,$
$'J(\mathfrak{p}_{a_2}') = \mathfrak{p}_{a_1}',\ \bar{\mathfrak{q}}_1,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{q}}_\alpha,\ \mathfrak{p}_1',\ \bar{\mathfrak{r}}_1,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{r}}_\beta,$

2′) $'J(\mathfrak{p}_{a_1}') = \mathfrak{p}_{a_2}',\ \mathfrak{q}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha,\ \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{r}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_\beta,$
$'J(\mathfrak{p}_{a_2}') = \mathfrak{p}_1',\ \bar{\mathfrak{q}}_1,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{q}}_\alpha,\ \mathfrak{p}_{a_1}',\ \bar{\mathfrak{r}}_1,\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{r}}_\beta.$

Laut den für die beiden vorliegenden Indexsysteme in Frage kommenden acht Kombinationen

---

*) Gemäfs dem Index

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{p}_{a_2},\ \ldots$$

sind durch die Annahmen

$$\text{a) } c(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{p}_{a_2}) = +1 \quad \text{und} \quad \text{b) } c(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{p}_{a_2}) = -1$$

die Elemente

$$\text{a) } \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_\infty \quad \text{und} \quad \text{b) } \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{p}_{a_2}$$

a priori als Hauptpunkte ausgeschlossen.

1) $a)_1$ und $a)_{1'}$, 2) $a)_1$ und $a)_{2'}$,
3) $a)_2$ und $a)_{1'}$, 4) $a)_2$ und $a)_{2'}$,
5) $b)_1$ und $b)_{1'}$, 6) $b)_1$ und $b)_{2'}$,
7) $b)_2$ und $b)_{1'}$, 8) $b)_2$ und $b)_{2'}$

haben sich die zur Reduktion des Tripels $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_{a_1}'$, $\mathfrak{p}_{a_2}'$ in ein Fundamentaltripel nach bekannten Regeln auszuführenden Inversionen auf die Elementegruppen zu beziehen:

1) $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2}'$, 2) $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\beta, \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2}'$,
3) $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\beta, \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2}'$, 4) $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2}'$,
5) $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2}'$, 6) $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\beta, \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2}'$,
7) $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\beta, \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2}'$, 8) $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2}'$,

und jedes Mal wird, wie verlangt, der Hauptpunkt des resultierenden Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_{a_1}'$, $\mathfrak{p}_{a_2}'$ demjenigen des anderen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_{a_1}$, $\mathfrak{p}_{a_2}$ entsprechen.

Man vergleiche in dem so erhaltenen Indexsysteme und dem anderen I weiter die beiden Verkettungen der entsprechenden Tripelpaare

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2}'; \quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_2}', \mathfrak{p}_{a_3}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{a_2}; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_{a_3}.$$

Nach früheren Betrachtungen gilt betreffs eines Indexsystemes

$$'J(\mathfrak{p}_t), \quad 'J(\mathfrak{p}_x), \quad 'J(\mathfrak{p}_y), \quad 'J(\mathfrak{p}_z):$$

1) dafs je drei der vier Elemente desselben ein Fundamentaltripel konstituieren,

2) dafs die Charakteristiken zweier dieser zusammen mit dem Hauptpunkte des einen auch stets den Hauptpunkt des anderen bestimmen.

Demgemäfs besitzen in den korrespondierenden Partialsystemen

$$'J(\mathfrak{p}_1), \ 'J(\mathfrak{p}_{a_1}), \ 'J(\mathfrak{p}_{a_2}), \ 'J(\mathfrak{p}_{a_3}) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_1'), \ 'J(\mathfrak{p}_{a_1}'), \ 'J(\mathfrak{p}_{a_2}'), \ 'J(\mathfrak{p}_{a_3}')$$

die Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_{a_3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_2}', \mathfrak{p}_{a_3}'$$

auch entsprechende Hauptpunkte, und es kann in dem vollständigen Systeme

$$'J(\mathfrak{p}_1'), \quad 'J(\mathfrak{p}_2'), \ \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_n')$$

die Elementarreduktion des ursprünglichen Tripels

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_2}', \mathfrak{p}_{a_3}'$$

in ein dem vorgeschriebenen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_{a_3}$$

durchaus analoges Fundamentaltripel ohne Schädigung des anderen geschehen:

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2}'.$$

Durch den letzten Vorgang rücken die beiden Tripel

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_2}', \mathfrak{p}_{a_3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_3}', \mathfrak{p}_{a_4}$$

völlig in die Stellung der beiden ersten

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_2}', \mathfrak{p}_{a_3}.$$

Man wird daher das dritte Tripel

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_3}', \mathfrak{p}_{a_4}$$

ohne Störung des zweiten $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_2}', \mathfrak{p}_{a_3}$ und zufolge eines pag. 197 gefundenen Hülfssatzes auch ohne Änderung des ersten $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2}$ in ein dem Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_3}, \mathfrak{p}_{a_4}$$

völlig entsprechendes transformieren.

Indem man so schrittweise zunächst zu allen Paaren entsprechender Tripel der beiden Verkettungen übergeht

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{a_2}; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_{a_3}; \cdots; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{a_{\alpha_1-1}}, \mathfrak{p}_{a_{\alpha_1}},$$

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_{a_2}'; \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_2}', \mathfrak{p}_{a_3}'; \cdots; \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{a_{\alpha_1-1}}', \mathfrak{p}_{a_{\alpha_1}}'$$

und darauf die Tripelgruppen

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{k_1}', \mathfrak{p}_{k_2}'; \quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{k_2}', \mathfrak{p}_{k_3}'; \cdots; \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_{k_{\varkappa_1-1}}', \mathfrak{p}_{k_{\varkappa_1}}'$$
$$(k = b, c, \ldots, r)$$

nacheinander auf gleiche Weise behandelt, wird man das verlangte System $\mathrm{I}_{1,2}'$ erhalten.

Um ohne Schaden für die erzielte Übereinstimmung zwischen den Systemen $\mathrm{I}_{1,2}'$ und I ersteres weiter in ein System I_2' elementar umzuwandeln, welches mit I auch den Index $'\overline{J}(\mathfrak{p}_2)$ identisch hat, suche man in den zu

$$\mathrm{I}_{1,2}' \quad \text{und} \quad \mathrm{I}$$

gehörigen, als verschieden vorausgesetzten Indices

$$'J_{1,2}(\mathfrak{p}_2') \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_2)$$

zwei Paare entsprechender Elemente

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k,$$

welche der ihre Reihenfolge in den respektiven Indices regelnden Bestimmung unterliegen

$$'J_{1,2}(\mathfrak{p}_2') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \ldots, \quad '\overline{J}(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k, \ldots, \mathfrak{p}_i, \cdots.$$

Da die drei Elemente

$$\mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k'$$

zusammen mit denjenigen irgend eines Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y'$$

ein System von sechs Elementen bestimmen, für welches die Voraussetzungen des Theorems (14) bestehen, gelten für dasselbe auch dessen Behauptungen. Es enthalten also in den Indices

$$J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_2', \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{p}_1'; \ldots, \mathfrak{r}_\beta,$$
$$J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_2', \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha, \mathfrak{p}_i', \bar{\mathfrak{r}}_1, \bar{\mathfrak{r}}_2, \ldots, \mathfrak{p}_1', \ldots, \bar{\mathfrak{r}}_\beta$$

die beiden Anordnungen

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha$$

die Elemente

$$\mathfrak{p}_x' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_y',$$

wenn überhaupt, in gleichen Folgen. Alsdann aber kann man nach Theorem (13) den Stellenwechsel der Elemente $\mathfrak{p}_i'$, $\mathfrak{p}_k'$ in $'J(\mathfrak{p}_2')$ durch die Inversionen einer Folge von Fundamentaltripeln bewirken, welche, gebildet aus den Elementen der Gruppe

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k',$$

von den Fundamentaltripeln des Elementes $\mathfrak{p}_1'$ durchweg verschieden sind.

Indem man dieses Verfahren in Bezug auf jedes Paar benachbarter Elemente des Index $'J_{1,2}(\mathfrak{p}_2')$ wiederholt, dessen Anordnung derjenigen des korrespondierenden Paares im Index $'J(\mathfrak{p}_2)$ invers ist, wird man das System $\mathrm{I}_{1,2}'$ offenbar in das gesuchte I_2' überführen.

Mit der vollzogenen Identifizierung der Indices

$$'J(\mathfrak{p}_2') \quad \text{und} \quad '\bar{J}(\mathfrak{p}_2)$$

ist gleichzeitig diejenige der Charakteriken je zweier die Elemente

$$\mathfrak{p}_2' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2$$

enthaltenden zugeordneten Tripel erreicht. — Denn nach den Schlufsbetrachtungen des § 3 sind durch einen Index

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

und durch die Charakteristiken der $n - 2$ Tripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \ldots; \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{n-1}, \mathfrak{p}_n$$

diejenigen aller anderen Tripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$$

und durch die fernere Angabe eines zweiten Index $'J(\mathfrak{p}_2)$ auch diejenigen aller Tripel des Elementes $\mathfrak{p}_2$ bestimmt.

Es mag dem Tripel $\mathfrak{p}_2'$, $\mathfrak{p}_i'$, $\mathfrak{p}_k'$ von I_2' das Fundamentaltripel $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$ von I entsprechen. Alsdann sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

1) entweder sind die korrespondierenden Tripel

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$$

ebenfalls Fundamentaltripel,

2) oder es ist keines von beiden ein solches.

Zunächst folgt aus der leicht zu erweisenden Thatsache, dafs das Indexsystem einer Gruppe von vier Elementen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k$$

durch zwei Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_2)$$

und die Charakteristiken zweier Tripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_k$$

unzweideutig definiert ist, mit Bezug auf beide Fälle, dafs in den Partialsystemen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k'$$

die Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k'$$

entsprechende Hauptpunkte besitzen.

Da ferner in einem Systeme von vier Elementen

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k'$$

durch die Wahl des Hauptpunktes eines Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k'$$

die Stellung des vierten Elementes $\mathfrak{p}_1'$ in den drei Indices

$$'J(\mathfrak{p}_2'), \ 'J(\mathfrak{p}_i'), \ 'J(\mathfrak{p}_k')$$

unzweideutig bestimmt wird, gelten in dem Systeme aller n Elemente

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_n',$$

falls $\mathfrak{p}_2'$, $\mathfrak{p}_i'$, $\mathfrak{p}_k'$ nicht Fundamentaltripel ist, die Indices:

$$\begin{aligned}
'J(\mathfrak{p}_2') &= \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \ldots, \\
J(\mathfrak{p}_i') &= \mathfrak{p}_2', \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\beta, \\
J(\mathfrak{p}_k') &= \mathfrak{p}_2', \bar{\mathfrak{q}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha, \mathfrak{p}_i', \bar{\mathfrak{r}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{r}}_\beta,
\end{aligned}$$

wo die beiden Reihen

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{q}}_1, \bar{\mathfrak{q}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha$$

einerseits frei von dem Elemente $\mathfrak{p}_1'$ sind, andererseits zwei Elemente $\mathfrak{p}_x'$, $\mathfrak{p}_y'$ eines Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_x'$, $\mathfrak{p}_y'$, wenn überhaupt, in gleichen Folgen enthalten.

Es kann folglich die Reduktion des Tripels $\mathfrak{p}_2'$, $\mathfrak{p}_i'$, $\mathfrak{p}_k'$ auf ein Fundamentaltripel ohne Schädigung des Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_x'$, $\mathfrak{p}_y'$ erfolgen, so zwar, dafs das resultierende Fundamentaltripel sowohl in der Charakteristik als im Hauptpunkte dem anderen $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$ entspricht.

Indem man diese Schlufsweise in Verbindung mit den bei den analogen Umformungen der Tripel von $\mathfrak{p}_1'$ verwerteten Deduktionen successive auf alle $\mathfrak{p}_2'$ enthaltenden Tripel anwendet, welchen Fundamentaltripel von I korrespondieren, wird man das Indexsystem I_2' durch eine ganz bestimmte Gruppe von Inversionen in das gesuchte $\mathrm{I}_{2;1}'$ überführen.

Angenommen, es sei gelungen, eine Folge von Inversionen anzugeben, vermittelst deren das System

$$\mathrm{I}' \equiv {}'J_1(\mathfrak{p}_1'),\ {}'J_1(\mathfrak{p}_2'),\ \ldots,\ {}'J_1(\mathfrak{p}_n')$$

in ein anderes I_m' übergeführt wird,

$$\mathrm{I}_m' \equiv {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_1'),\ {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_2'),\ \ldots,\ {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_m'),$$
$${}'J_m(\mathfrak{p}_{m+1}'),\ {}'J_m(\mathfrak{p}_{m+2}'),\ \ldots,\ {}'J_m(\mathfrak{p}_n'),$$

welches mit dem Systeme

$$\mathrm{I} \equiv {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ {}'J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ {}'J(\mathfrak{p}_n)$$

in folgenden Stücken übereinstimmt:

1) in den Indices der m Elemente

$$\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_m',$$

2) in den Charakteristiken aller mindestens eines derselben enthaltenden Tripel,

3) in den zu besagten m Elementen gehörigen Fundamentaltripeln,

4) aufser in den Charakteristiken auch in den Hauptpunkten letzterer.

Die Analogie der beiden Systeme I_m' und I in den m Indicespaaren

$${}'J(\mathfrak{p}_1'),\ {}'J(\mathfrak{p}_1);\ \ldots;\ {}'J(\mathfrak{p}_m'),\ {}'J(\mathfrak{p}_m)$$

gestattet zunächst einen wichtigen Schlufs auf die Bildungsweise je zweier entsprechenden Indices

$${}'J_m(\mathfrak{p}_{m+h}') \quad \text{und} \quad {}'J(\mathfrak{p}_{m+h}).$$

Es bestimmen nämlich gemäfs dem Theorem (6) die beiden Bildungen

$$J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2,\ [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha'}, \mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{\beta'}],\ \mathfrak{p}_{m+1},\ [\mathfrak{q}_{\alpha'+1}, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha}, \mathfrak{r}_{\beta'+1}, \ldots, \mathfrak{r}_{\beta}]$$

und

$$J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\alpha'}, \mathfrak{r}_{\beta'+1}, \ldots, \mathfrak{r}_\beta], \mathfrak{p}_{m+1}, [\mathfrak{q}_{\alpha'+1}, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{\beta'}]$$

die dritte:

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_1, [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_\alpha], \mathfrak{p}_2, [\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\beta].$$

Der fortgesetzte Vergleich der verschiedenen Paare

$$'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_l, \ldots, \mathfrak{p}_{m+1}, \ldots \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_k, \ldots, \mathfrak{p}_{m+1}, \ldots$$
$$(k, l = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

liefert daher schliefslich:

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_{a_1}, [\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\varrho], \mathfrak{p}_{a_2}, [\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_\sigma], \mathfrak{p}_{a_3}, \ldots$$
$$\ldots, \mathfrak{p}_{a_{m-1}}, [\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_\tau], \mathfrak{p}_{a_m}, [\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\xi]$$

und analog:

$$J_m(\mathfrak{p}'_{m+1}) = \mathfrak{p}'_{a_1}, [\bar{\mathfrak{r}}'_1, \ldots, \bar{\mathfrak{r}}'_\varrho], \mathfrak{p}'_{a_2}, [\bar{\mathfrak{s}}'_1, \ldots, \bar{\mathfrak{s}}'_\sigma], \mathfrak{p}'_{a_3}, \ldots$$
$$\ldots, \mathfrak{p}'_{a_{m-1}}, [\bar{\mathfrak{t}}'_1, \ldots, \bar{\mathfrak{t}}'_\tau], \mathfrak{p}'_{a_m}, [\bar{\mathfrak{x}}'_1, \ldots, \bar{\mathfrak{x}}'_\xi],$$

wo die Elementefolge

$$\mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{a_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_m}$$

eine gewisse Permutation der anderen darstellt

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m.$$

Es mögen die Anordnungen

$$\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\varrho \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{r}}_1, \bar{\mathfrak{r}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{r}}_\varrho$$

nicht identisch übereinstimmen. — Dann enthält die erste notwendig ein Paar benachbarter Elemente

$$\mathfrak{r}_h \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_{h+1},$$

welche die zweite in umgekehrter Reihenfolge aufweist:

$$\bar{\mathfrak{r}}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{h+1}, \ldots, \mathfrak{r}_h, \ldots, \bar{\mathfrak{r}}_\varrho,$$
$$\mathfrak{r}_h \equiv \mathfrak{p}_{m+2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_{h+1} \equiv \mathfrak{p}_{m+3}.$$

Unter vorläufiger Vernachlässigung der Elemente

$$\mathfrak{p}_{m+4}, \mathfrak{p}_{m+5}, \ldots, \mathfrak{p}_n \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}'_{m+1}, \mathfrak{p}'_{m+5}, \ldots, \mathfrak{p}'_n$$

hat man also die Indices:

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{m+2}, \mathfrak{p}_{m+3}, \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_{a_3}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_m},$$
$$J_m(\mathfrak{p}'_{m+1}) = \mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{p}'_{m+3}, \mathfrak{p}'_{m+2}, \mathfrak{p}'_{a_2}, \mathfrak{p}'_{a_3}, \ldots, \mathfrak{p}'_{a_m}.$$

Indem man jetzt einerseits von $\mathfrak{p}_{m+2}$ und $\mathfrak{p}'_{m+2}$, andererseits von $\mathfrak{p}_{m+3}$ und $\mathfrak{p}'_{m+3}$ absieht, findet man übereinstimmend die Beziehung:

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}) = J_m(\mathfrak{p}'_{m+1}).$$

Infolgedessen bestimmen sich nach bekannten Regeln (Theorem (4)):

$$J(\mathfrak{p}_{m+2}) = \mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{b_1},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{b_m} = J_m(\mathfrak{p}'_{m+2}),$$
$$J(\mathfrak{p}_{m+3}) = \mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{c_1},\ \mathfrak{p}_{c_2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{c_m} = J_m(\mathfrak{p}'_{m+3}).$$

Deshalb und wegen Theorem (6b) fallen die in Bezug auf die Systeme

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m+2}, \mathfrak{p}_{m+3} \text{ u. } \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}'_m, \mathfrak{p}'_{m+1}, \mathfrak{p}'_{m+2}, \mathfrak{p}'_{m+3}$$

geltenden Indices

$$J(\mathfrak{p}_{m+2}),\ J(\mathfrak{p}_{m+3}) \quad \text{und} \quad J_m(\mathfrak{p}'_{m+2}),\ J_m(\mathfrak{p}'_{m+3})$$

notwendig unter eine der Formen:

1) $J(\mathfrak{p}_{m+2}) = \mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{b_1},\ \mathfrak{p}_{b_2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{b_{\beta_1}},\ \mathfrak{p}_{m+3},\ \mathfrak{p}_{b_{\beta_1}+1},\ \ldots$
$\ldots,\ \mathfrak{p}_{b_m} = J_m(\mathfrak{p}'_{m+2}),$

$J(\mathfrak{p}_{m+3}) = \mathfrak{p}_{m+1},\ [\mathfrak{p}_{b_1},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{b_{\beta_1}}],\ \mathfrak{p}_{m+2},\ [\mathfrak{p}_{b_{\beta_1}+1},\ \ldots,$
$\ldots,\ \mathfrak{p}_{b_m}] = J_m(\mathfrak{p}'_{m+3}),$

2) $J(\mathfrak{p}_{m+2}) = (\mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{m+3}),\ \mathfrak{p}_{b_1},\ \mathfrak{p}_{b_2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{b_m} = J_m(\mathfrak{p}'_{m+2}),$

$J(\mathfrak{p}_{m+3}) = (\mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{m+2}),\ \mathfrak{p}_{c_1},\ \mathfrak{p}_{c_2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{c_m} = J_m(\mathfrak{p}'_{m+3}).$

Die erste Annahme ist illusorisch, da aus den $m+2$ Relationen

$$J(\mathfrak{p}_1) = J_m(\mathfrak{p}_1'),\ J(\mathfrak{p}_2) = J_m(\mathfrak{p}_2'),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_m) = J_m(\mathfrak{p}'_m),$$
$$J(\mathfrak{p}_{m+2}) = J_m(\mathfrak{p}'_{m+2}),\ J(\mathfrak{p}_{m+3}) = J_m(\mathfrak{p}'_{m+3})$$

auch die weitere folgt

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}) = J_m(\mathfrak{p}'_{m+1}),$$

diese aber im Widerspruch mit der Voraussetzung steht.

Es kommt also nur der zweite Fall in Betracht, und hierfür bestimmen sich die betreffenden Indices durch:

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{m+2}, \mathfrak{p}_{m+3}, \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_{a_3}, \ldots, J_m(\mathfrak{p}'_{m+1}) = \mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{p}'_{m+3}, \mathfrak{p}'_{m+2}, \mathfrak{p}'_{a_2}, \mathfrak{p}'_{a_3}, \ldots$$

$$J(\mathfrak{p}_{m+2}) = (\mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m+3}), \mathfrak{p}_{b_1}, \mathfrak{p}_{b_2}, \ldots, J_m(\mathfrak{p}'_{m+2}) = (\mathfrak{p}'_{m+1}, \mathfrak{p}'_{m+3}), \mathfrak{p}'_{b_1}, \mathfrak{p}'_{b_2}, \ldots;$$

$$J(\mathfrak{p}_{m+3}) = (\mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m+2}), \mathfrak{p}_{c_1}, \mathfrak{p}_{c_2}, \ldots, J_m(\mathfrak{p}'_{m+3}) = (\mathfrak{p}'_{m+1}, \mathfrak{p}'_{m+2}), \mathfrak{p}'_{c_1}, \mathfrak{p}'_{c_2}, \ldots.$$

Unter den oben betreffs der Indexsysteme I'_m und I gemachten Voraussetzungen findet man folglich in dem Systeme aller n Elemente

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_n'$$

die Gruppe der Indices:

*) $J_m(\mathfrak{p}'_{m+1}) = \mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_2', \ldots, \mathfrak{p}'_{m+3}, \mathfrak{p}'_{m+2}, \ldots, \mathfrak{r}_\varrho', \mathfrak{p}'_{a_2}, \ldots, \mathfrak{p}'_{a_3}, \ldots,$

$J_m(\mathfrak{p}'_{m+2}) = \mathfrak{p}'_{m+1}, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_\alpha', \mathfrak{p}'_{m+3}, \ldots, \mathfrak{p}'_{b_1}, \ldots, \mathfrak{p}'_{b_2}, \ldots, \mathfrak{p}'_{b_m}, \ldots,$

$J_m(\mathfrak{p}'_{m+3}) = \mathfrak{p}'_{m+1}, [\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_\alpha'], \mathfrak{p}'_{m+2}, \ldots, \mathfrak{p}'_{c_1}, \ldots, \mathfrak{p}'_{c_2}, \ldots, \mathfrak{p}'_{c_m}, \ldots$

Die Bildungsweise dieser drei Indices läfst auf den ersten Blick die Möglichkeit erkennen, innerhalb des Systemes I'_m den Stellenwechsel der Nachbarelemente

$$\mathfrak{p}'_{m+2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}'_{m+3}$$

im Index

$$J(\mathfrak{p}'_{m+1})$$

durch eine sich ausschliefslich auf die Elementegruppe

$$\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_\alpha', \mathfrak{p}'_{m+1}, \mathfrak{p}'_{m+2}, \mathfrak{p}'_{m+3}$$

beziehende Inversionenfolge auszuführen.

Es waren die beiden Indices

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}) \quad \text{und} \quad J_m(\mathfrak{p}'_{m+1})$$

bestimmt in den Formen:

$J(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_{a_1}, [\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\varrho], \mathfrak{p}_{a_2}, [\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_\sigma], \mathfrak{p}_{a_3}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_m}, [\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\xi],$

$J_m(\mathfrak{p}'_{m+1}) = \mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{r}_1', \ldots, \mathfrak{r}_\varrho', \mathfrak{p}'_{a_2}, \mathfrak{f}_1', \ldots, \mathfrak{f}_\sigma', \mathfrak{p}'_{a_3}, \ldots, \mathfrak{p}'_{a_m}; \mathfrak{x}_1', \ldots, \mathfrak{x}_\xi'.$

Wendet man daher in I'_m und allen aus ihm abgeleiteten Systemen die vorbeschriebene Umformungsmethode successive auf die einzelnen Reihen an

$$\mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_2', \ldots, \mathfrak{r}_\varrho'; \mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2', \ldots, \mathfrak{f}_\sigma'; \ldots; \mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_2', \ldots, \mathfrak{x}_\xi',$$

so wird man den Index $'J_m(\mathfrak{p}'_{m+1})$ durch eine Folge ganz aufserhalb des Systemes

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}'_m$$

sich vollziehender von den Fundamentaltripeln dieser Elemente völlig unabhängiger Inversionen auf die Form des Index $'\bar{J}(\mathfrak{p}_{m+1})$ bringen.

Nach den ursprünglichen Voraussetzungen wird das dadurch entstehende Indexsystem $\mathrm{I}'_{m,1}$ bereits in allen denjenigen Fundamentaltripeln des Elementes $\mathfrak{p}'_{m+1}$ mit dem Systeme I übereinstimmen, welche eines der ersten m Elemente $\mathfrak{p}_i'$ enthalten. Aufserdem kommen je zwei korrespondierenden Tripeln

$$\mathfrak{p}'_{m+1}, \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y$$

stets gleiche Charakteristiken zu.

---

*) Vergl. hierzu die Ausführungen des folgenden Paragraphen über die Elementartransformationen eines allgemeinen Indexsystemes.

Gesetzt nun, es entspreche dem Tripel

$$\mathfrak{p}'_{m+1},\ \mathfrak{p}'_{m+2},\ \mathfrak{p}'_{m+3} \equiv \mathfrak{T}'$$

das Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{m+2},\ \mathfrak{p}_{m+3} \equiv \mathfrak{T}.$$

Wenn dann $\mathfrak{T}'$ selbst ein Fundamentaltripel darstellt, so folgt, wie oben, aus den Beziehungen

$$'J(\mathfrak{p}_1') = 'J(\mathfrak{p}_1) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}'_{m+1}) = 'J(\mathfrak{p}_{m+1}),$$

$$c(\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}'_{m+1},\ \mathfrak{p}'_{m+h}) = c(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{m+h})$$

$$(h = 2, 3)$$

für beide Fundamentaltripel

$$\mathfrak{T}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}$$

auch die Korrespondenz ihrer Hauptpunkte.

Ist dagegen $\mathfrak{T}'$ kein Fundamentaltripel, so nehmen wegen der doch allgemein herrschenden Korrespondenz je zweier Quadrupel

$$\mathfrak{p}_h,\ \mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{m+2},\ \mathfrak{p}_{m+3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_h',\ \mathfrak{p}'_{m+1},\ \mathfrak{p}'_{m+2},\ \mathfrak{p}'_{m+3}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, m)$$

die Elemente

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_m'$$

in respective den Indices

$$'\bar{J}(\mathfrak{p}_{m+1}),\ '\bar{J}(\mathfrak{p}_{m+2}),\ '\bar{J}(\mathfrak{p}_{m+3}) \quad \text{und} \quad '\bar{J}(\mathfrak{p}'_{m+1}),\ 'J_m(\mathfrak{p}'_{m+2}),\ 'J_m(\mathfrak{p}'_{m+3})$$

gegenüber den zweimal drei Elementen

$$\mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{m+2},\ \mathfrak{p}_{m+3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}'_{m+1},\ \mathfrak{p}'_{m+2},\ \mathfrak{p}'_{m+3}$$

ganz entsprechende Stellungen ein. Es involvieren daher die in I geltenden Beziehungen

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_{m+2},\ \mathfrak{p}_{m+3},\ \ldots;\ J(\mathfrak{p}_{m+2}) = \mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{m+3},\ \ldots;$$

$$J(\mathfrak{p}_{m+3}) = \mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{m+2},\ \ldots$$

für $\mathrm{I}'_{m,1}$ gemäfs dem Index

$$J(\mathfrak{p}'_{m+1}) = \mathfrak{p}'_{m+2},\ \mathfrak{p}'_{m+3},\ \ldots$$

die beiden anderen:

$$J_m(\mathfrak{p}'_{m+2}) = \mathfrak{p}'_{m+1},\ \mathfrak{q}_1',\ \mathfrak{q}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha',\ \mathfrak{p}'_{m+3},\ \ldots,$$

$$J_m(\mathfrak{p}'_{m+3}) = \mathfrak{p}'_{m+1},\ \bar{\mathfrak{q}}_1',\ \bar{\mathfrak{q}}_2',\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{q}}_\alpha',\ \mathfrak{p}'_{m+2},\ \ldots,$$

wo die aus denselben α Elementen gebildeten Reihen

$$\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_\alpha' \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{q}}_1', \bar{\mathfrak{q}}_2', \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_\alpha'$$

kein einziges der ersten m Elemente $\mathfrak{p}_i'$ enthalten.

Es existiert mithin eine innerhalb der Elementegruppe

$$\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_\alpha', \mathfrak{p}_{m+2}', \mathfrak{p}_{m+3}'$$

auszuführende Folge von Inversionen, welche das System $\mathrm{I}_{m,1}'$ in ein anderes mit dem $\mathfrak{T}$ entsprechenden Fundamentaltripel $\mathfrak{T}'$ überführt.

Was betreffs der Umformung des Tripels $\mathfrak{T}'$ dargelegt worden, läfst sich unbeschadet der erzielten Reduktionen successive auf alle analogen Tripel $\mathfrak{p}_{m+1}', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y'$ ausdehnen. Man kann also das System $\mathrm{I}_{m,1}'$ unter Erhaltung der Indices und Fundamentaltripel der m Elemente

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_m'$$

elementar in ein System I_{m+1}' umwandeln, welches mit dem Systeme I auch in dem Index und den wohl definierten Fundamentaltripeln des Elementes $\mathfrak{p}_{m+1}'$ übereinstimmt.

Es habe die geschilderte Schlufsweise, bis zu dem Werte $m = n - 2$ fortgesetzt, das System ergeben:

$$\mathrm{I}_{n-2}' = {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_1'), {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_2'), \ldots, {}'J(\mathfrak{p}_{n-2}'), {}'J_{n-2}(\mathfrak{p}_{n-1}'), {}'J_{n-2}(\mathfrak{p}_n').$$

Dann gelten notwendig auch die Beziehungen:

$${}'J_{n-2}(\mathfrak{p}_{n-1}') = {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_{n-1}) \quad \text{und} \quad {}'J_{n-2}(\mathfrak{p}_n') = {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_n).$$

Da nämlich für jedes Elementequadrupel der Zusammensetzung

$$\mathfrak{p}_{n-1}', \mathfrak{p}_n', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k'$$

bereits die Relationen bestehen:

$${}'J_{n-2}(\mathfrak{p}_i') = {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_i), \quad {}'J_{n-2}(\mathfrak{p}_k') = {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_k),$$

$$c(\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{n-1}') = c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{n-1}), \quad c(\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_n') = c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_n),$$

so sind auch die anderen erfüllt:

$${}'J_{n-2}(\mathfrak{p}_{n-1}') = {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_{n-1}) \quad \text{und} \quad {}'J_{n-2}(\mathfrak{p}_n') = {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_n),$$

also auch die behaupteten.

Dem hier entwickelten Transformationsverfahren liegt die stillschweigende Voraussetzung zu Grunde, dafs die zu vollziehenden Inversionen sämtlich Fundamentaltripel mit endlichen Hauptpunkten betreffen. Denn nur für ein solches Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_i' \mid \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'$$

ist der Begriff der Inversion eindeutig definiert, geometrisch mit dem

Durchgange des Hauptpunktes

$$\mathfrak{p}_i'$$

durch die endliche Verbindungsstrecke

$$\mathfrak{p}_k' \quad \mathfrak{p}_l',$$

schematisch durch den Stellenwechsel der Elementepaare

$$\mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'; \quad \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_i'; \quad \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k'$$

in resp. den Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i'), \ 'J(\mathfrak{p}_k'), \ 'J(\mathfrak{p}_l').$$

Gegenüber einem Fundamentaltripel des Typus

$$\mathfrak{p}_\infty' \mid \mathfrak{p}_i', \ \mathfrak{p}_k', \ \mathfrak{p}_l'$$

unterscheidet die Anschauung drei an sich gleichberechtigte Möglichkeiten des Inversionsprozesses, nämlich den Durchgang jedes einzelnen Punktes erst durch die unendlich ferne und dann durch die Verbindungsgerade der beiden anderen.

Gesetzt daher, es wäre in der Reihe der oben ermittelten successive hervortretenden Fundamentaltripel

$$\mathfrak{T}_1', \ \mathfrak{T}_2', \ \ldots, \ \mathfrak{T}_\mu',$$

durch deren Inversionen das System I′ in I übergeht, das erste Tripel der Art gegeben durch

$$\mathfrak{T}_h' \equiv \mathfrak{p}_i', \ \mathfrak{p}_k', \ \mathfrak{p}_l',$$
$$(m + 1 \leqq i < k < l)$$

so würde der Inversion desselben in dem zugehörigen Indexsysteme

$$''J_m(\mathfrak{p}_1') = 'J(\mathfrak{p}_1), \ 'J_m(\mathfrak{p}_2') = 'J(\mathfrak{p}_2), \ \ldots, \ 'J_m(\mathfrak{p}_m') = 'J(\mathfrak{p}_m),$$
$$'J_m(\mathfrak{p}_{m+1}') \neq 'J(\mathfrak{p}_{m+1}), \ 'J_m(\mathfrak{p}_{m+2}') \neq 'J(\mathfrak{p}_{m+2}), \ \ldots, \ 'J_m(\mathfrak{p}_n') \neq 'J(\mathfrak{p}_n)$$
$$(c(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y') = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y))$$

gemäfs den gerade geltenden Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_a', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_k', \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_b', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_c', \ldots, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_i', \ldots,$$
$$(c(\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l') = +1)$$

durch jede der drei Annahmen genügt werden:

1) $J'(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_a', \ldots, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_b', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_i', \ldots,$
$'J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_c', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \ldots;$

2) $'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_a', \ldots, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \ldots, J'(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_b', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_i', \ldots,$
$'J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_c', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \ldots;$

3) $'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_a', \ldots, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \ldots, 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_b', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_i', \ldots,$

$$J'(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_c', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \ldots .$$

Der Vorgang würde also aufser der Umstellung der Elementepaare

$$\mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'; \quad \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_i'; \quad \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k'$$

in resp.

$$'J(\mathfrak{p}_i'), 'J(\mathfrak{p}_k'), 'J(\mathfrak{p}_l')$$

noch den Richtungswechsel eines dieser drei Indices, etwa des ersten, verlangen. Hierdurch würden die Charakteristiken sämtlicher Elementetripel

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{h_1}', \mathfrak{p}_{h_2}'$$
$$(h_1, h_2 = 1, 2, \ldots, m)$$

in die entgegengesetzten verwandelt und damit die bereits bestehenden Relationen

$$c(\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_z') = c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_z)$$

wieder illusorisch gemacht werden.

Weil aber die obige Umformungsmethode an den durch die Inversionen gewisser λ Tripel

$$\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_\lambda'$$

einmal erlangten Beziehungen

$$'J(\mathfrak{p}_1') = 'J(\mathfrak{p}_1) \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y') = c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y)$$

in ihrer Fortbildung consequent festhält, sie mithin die vollständige Inversion eines Index ausschliefst, fordert die Erkenntnis ihrer bedingungslosen Durchführbarkeit noch den Nachweis, dafs jedes einzelne der in ihrem weiteren Verfolge zur Inversion gelangenden Fundamentaltripel

$$\mathfrak{T}_{\lambda+1}', \mathfrak{T}_{\lambda+2}', \ldots, \mathfrak{T}_\mu'$$

einen endlichen Hauptpunkt besitzt.

Zu dem Ende dient folgende Überlegung. Gemäfs ihrer Entstehungsweise wird man die Fundamentaltripel

$$\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_\mu'$$

in zwei Kategorien sondern:

1) in solche, welche nach der Herstellung des Systemes

$$'J_m(\mathfrak{p}_1') = 'J(\mathfrak{p}_1), 'J_m(\mathfrak{p}_2') = 'J(\mathfrak{p}_2), \ldots, 'J_m(\mathfrak{p}_m') = 'J(\mathfrak{p}_m),$$
$$'J_m(\mathfrak{p}_{m+1}') \neq 'J(\mathfrak{p}_{m+1}), 'J_m(\mathfrak{p}_{m+2}') \neq 'J(\mathfrak{p}_{m+2}), \ldots, 'J_m(\mathfrak{p}_n') \neq 'J(\mathfrak{p}_n)$$

aus dem Vergleiche der differierenden Indices

$$'J_m(\mathfrak{p}'_{m+1}) = \mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_{i-1}', \ldots, \mathfrak{q}_k', \mathfrak{q}_i', \ldots, \mathfrak{p}'_{a_2}, \ldots, \mathfrak{p}'_{a_3}, \ldots,$$

$$'J(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{i-1}, \mathfrak{q}_i, \ldots, \mathfrak{p}_{a_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_3}, \ldots$$

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m = [1, 2, 3, \ldots, m])$$

in den Tripeln

$$\mathfrak{p}'_{m+1}, \mathfrak{q}_i', \mathfrak{q}_k'$$

unvermittelt hervortreten;

2) in solche, welche im Gefolge der Reduktion eines Tripels erster Art

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'$$

mit den Indices

$$J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \ldots,$$

$$J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_2', \ldots, \mathfrak{p}_x', \ldots, \mathfrak{p}_y', \ldots, \mathfrak{r}_\alpha', \mathfrak{p}_l', \ldots,$$

$$J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_i', \bar{\mathfrak{r}}_1', \bar{\mathfrak{r}}_2', \ldots, \mathfrak{p}_y', \ldots, \mathfrak{p}_x', \ldots, \bar{\mathfrak{r}}_\alpha', \mathfrak{p}_k', \ldots$$

als die Tripel resultieren:

$$\mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y'; \quad \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y' \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x'; \quad \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_y'.$$

Im Falle eines Tripels der ersten Gruppe

$$\mathfrak{p}'_{m+1}, \mathfrak{q}_i', \mathfrak{q}_k'$$

involvieren die Beziehungen

$$c(\mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{p}'_{m+1}, \mathfrak{q}_i') = c(\mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{q}_i), \; c(\mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{q}_i', \mathfrak{q}_k') = c(\mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_k),$$

$$c(\mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{q}_k', \mathfrak{p}'_{m+1}) = c(\mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{q}_k, \mathfrak{p}_{m+1})$$

unter der Annahme des Primärbereiches

$$\mathfrak{p}'_\infty \mid \mathfrak{p}'_{m+1}, \mathfrak{q}_i', \mathfrak{q}_k'$$

für die entsprechenden Quadrupel

$$\mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{p}'_{m+1}, \mathfrak{q}_i', \mathfrak{q}_k' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_k$$

auch die Übereinstimmung der Indices:

$$'J(\mathfrak{p}'_{m+1}) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_{m+1}),$$

also einen Widerspruch mit der Voraussetzung.

Unter Annahme eines Tripels des zweiten Systemes von dem Typus

$$\mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y'$$

mit dem Primärbereiche

$$\mathfrak{p}'_\infty \mid \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y'$$

kann man statt der Inversion dieses stets diejenige des anderen ausführen:

$$\mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y'.$$

Zeigt dagegen das Tripel die Zusammensetzung

$$\mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_x',$$

gelten also die Indices

$$J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_{a_1}', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \ldots, \mathfrak{p}_{a_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{a_3}', \ldots, \mathfrak{p}_{a_m}', \ldots,$$

*) $J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_i', \ldots, \mathfrak{p}_{b_1}', \ldots, \mathfrak{p}_{b_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{b_m}', \ldots,$

$$J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_k', \ldots, \mathfrak{p}_{c_1}', \ldots, \mathfrak{p}_{c_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{c_m}', \ldots,$$

$([a_1, a_2, \ldots, a_m], [b_1, b_2, \ldots, b_m], [c_1, c_2, \ldots, c_m] = 1, 2, 3, \ldots, m)$

so involviert die Bedingung des Primärbereiches

$$\mathfrak{p}_\infty' \mid \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_x'$$

die gleichgerichteten Indices:

$$\overbrace{J(\mathfrak{p}_x')} = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_4}', \mathfrak{p}_{x_5}', \ldots, \mathfrak{p}_{x_n}',$$

$$\overbrace{J(\mathfrak{p}_k')} = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_i', \ldots, \mathfrak{p}_{b_1}', \ldots, \mathfrak{p}_{b_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{b_m}', \ldots,$$

$$\overbrace{J(\mathfrak{p}_i')} = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_i', \ldots, \mathfrak{p}_{c_m}', \ldots, \mathfrak{p}_{c_{m-1}}', \ldots, \mathfrak{p}_{c_1}', \ldots,$$

und folglich auch:

$$\overbrace{J(\mathfrak{p}_i')} = \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_k', \ldots, \mathfrak{p}_x', \ldots .$$

Dieselben gehen infolge eines Drehungswechsels des Index

$$\overbrace{J(\mathfrak{p}_x')}$$

und der nachherigen Inversion des Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_x' \mid \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_i',$$

in die anderen über:

$$\overbrace{J(\mathfrak{p}_x')} = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_n}', \mathfrak{p}_{x_{n-1}}', \ldots, \mathfrak{p}_{x_4}',$$

$$\overbrace{J(\mathfrak{p}_k')} = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \ldots, \mathfrak{p}_{b_1}', \ldots, \mathfrak{p}_{b_m}', \ldots,$$

$$\overbrace{J(\mathfrak{p}_i')} = \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_i', \ldots, \mathfrak{p}_{c_m}', \ldots, \mathfrak{p}_{c_1}', \ldots,$$

$$\overbrace{J(\mathfrak{p}_i')} = \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_k', \ldots, \mathfrak{p}_x', \ldots,$$

und es verwandelt sich mithin das Tripel

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'$$

---

*) Gegenüber dem allgemeineren Vorkommnis

$$J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{x_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{x_\lambda}', \mathfrak{p}_\ell', \ldots, \mathfrak{p}_{b_1}', \ldots, \mathfrak{p}_{b_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{b_m}', \ldots,$$

$$J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_{c_1}', \mathfrak{p}_{x_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{x_\lambda}', \mathfrak{p}_k', \ldots, \mathfrak{p}_{c_1}', \ldots, \mathfrak{p}_{c_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{c_m}', \ldots$$

ist derselbe Schlufs nur λ-mal zu wiederholen.

in ein Fundamentaltripel mit dem Primärbereiche

$$\mathfrak{p}_\infty' \mid \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'.$$

Es folgt aber aus den der Voraussetzung nach bestehenden Relationen

$$c(\mathfrak{p}_h', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k') = c(\mathfrak{p}_h', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l') = c(\mathfrak{p}_h', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_i') =$$
$$= c(\mathfrak{p}_h, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) = c(\mathfrak{p}_h, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l) = c(\mathfrak{p}_h, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i),$$
$$(h = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

dafs die beiden Tripel

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$$

innerhalb der Systeme

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_m' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$$

ganz entsprechende Stellungen einnehmen, sie also beide bei gleichen Charakteristiken die Primärbereiche definieren:

$$\mathfrak{p}_\infty' \mid \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_\infty \mid \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l.$$

Hieraus und aus der gleichfalls hypothetischen Übereinstimmung der Indicespaare

$$\overbar{J}(\mathfrak{p}_i'), \overbar{J}(\mathfrak{p}_i); \quad \overbar{J}(\mathfrak{p}_k'), \overbar{J}(\mathfrak{p}_k); \quad \overbar{J}(\mathfrak{p}_l'), \overbar{J}(\mathfrak{p}_l)$$

gegenüber den Systemen

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_m' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$$

folgt schliefslich auch deren Homologie hinsichtlich der anderen:

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_m' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m,$$

d. h. es bestehen:

$$\overbar{J}(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{a_2}', \mathfrak{p}_{a_3}', \ldots, \mathfrak{p}_{a_m}',$$

$$\overbar{J}(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_{a_3}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_m}.$$

Dieses Resultat steht aber im Widerspruche mit der ursprünglich angenommenen Coexistenz der Indices:

$$\overbar{J}(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_{a_1}', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{a_2}', \ldots \quad \text{und} \quad \overbar{J}(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_{a_2}, \ldots,$$

der Hauptpunkt des Tripels

$$\mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x'$$

fällt somit in eines seiner Elemente.

Die Entscheidung der letzten noch offenen Frage, ob und wie die ersten Phasen der Elementartransformation des Indexsystemes I′

in ein zweites I durch eindeutige und endliche Inversionen zu leisten seien, beruht auf der Gleichwertigkeit des Namenwechsels zweier Elemente

$$\mathfrak{p}_i' \text{ und } \mathfrak{p}_k'$$

mit einer ganz bestimmten Reihe derartiger Inversionen.

Es ergiebt sich diese Thatsache aus dem Vergleiche der Indices:

$$'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{i_{n-2}}' \text{ und } 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{k_1}', \mathfrak{p}_{k_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{k_{n-2}}'.$$

Hier bestimmen die in den Reihen

$$\mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}', \ldots, \mathfrak{p}_x', \ldots, \mathfrak{p}_y', \ldots \text{ und } \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{k_1}', \mathfrak{p}_{k_2}', \ldots, \mathfrak{p}_y', \ldots, \mathfrak{p}_x', \ldots$$

entgegengesetzt geordneten Elementepaare

$$\mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y'$$

nach Theorem (13) eine Succession von Tripeln

$$(1.)\quad \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_1}', \mathfrak{p}_{y_1}';\quad \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_2}', \mathfrak{p}_{y_2}';\quad \ldots;\quad \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_\lambda}', \mathfrak{p}_{y_\lambda}',$$

deren erstes ein Fundamentaltripel des gegebenen, jedes folgende nach den Inversionen aller vorangehenden ein Fundamentaltripel des abgeleiteten Indexsystemes darstellt.

Gemäfs der sich aufhebenden Wirkung einer zweimal nach einander ausgeführten Inversion wird nach Vollzug der Inversionen sämtlicher Tripel von (1.) die entgegengesetzte Tripelfolge

$$(2.)\quad \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_\lambda}', \mathfrak{p}_{y_\lambda}';\quad \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_{\lambda-1}}', \mathfrak{p}_{y_{\lambda-1}}';\quad \ldots;\quad \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_1}', \mathfrak{p}_{y_1}'$$

gegenüber dem transformierten Indexsysteme die analoge Eigenschaft zeigen. Es entsteht aber durch den besagten Umformungsprozefs der Reihe (1.) das System:

$$'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{i_{n-2}}', \quad 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i_1}', \mathfrak{p}_{i_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{i_{n-2}}',$$

$$J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{h_1}', \mathfrak{p}_{h_2}', \ldots,$$

$$h = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n.$$

Durch die weitere Vertauschung der Elemente

$$\mathfrak{p}_i' \text{ und } \mathfrak{p}_k',$$

d. h. durch die Inversionen der nach einander auftretenden Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{i_1}';\quad \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{i_2}';\quad \ldots;\quad \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{i_{n-2}}'$$

verwandelt sich die Reihe der Tripel

$$\mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_\lambda}', \mathfrak{p}_{y_\lambda}';\quad \ldots;\quad \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_1}', \mathfrak{p}_{y_1}'$$

unbeschadet ihres Charakters in die andere:

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{x_\lambda}', \mathfrak{p}_{y_\lambda}';\quad \ldots;\quad \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{x_1}', \mathfrak{p}_{y_1}'.$$

Dann aber führen die successiven Inversionen der Tripel dieser Reihe, wie behauptet, zu dem verlangten Systeme.

Dafs jedes der inversierten Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_h}', \mathfrak{p}_{y_h}'; \quad \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_m'; \quad \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{x_h}', \mathfrak{p}_{y_h}'$$

einen endlichen Hauptpunkt besitzt, ergiebt sich einerseits aus der ursprünglichen Construierbarkeit der einzelnen Elementequadrupel

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_h}', \mathfrak{p}_{y_h}',$$

andererseits aus den jeweiligen Indices:

1) $'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_h}', \mathfrak{p}_{y_h}'$ und $'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{y_h}', \mathfrak{p}_{x_h}',$

2) $'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_m', \ldots$ und $'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_m', \ldots,$

3) $'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_h}', \mathfrak{p}_{y_h}'$ und $'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{x_h}', \mathfrak{p}_{y_h}',$

$J(\mathfrak{p}_{x_h}') = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{y_h}', \ldots$ und $J(\mathfrak{p}_{y_h}') = \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{x_h}', \ldots$.

Danach enthalten die Primärbereiche

1) $\mathfrak{p}_\infty' \mid \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{x_h}', \mathfrak{p}_{y_h}'$, 2) $\mathfrak{p}_\infty' \mid \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_m'$, 3) $\mathfrak{p}_\infty' \mid \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{x_h}', \mathfrak{p}_{y_h}'$

resp. die Elemente:

1) $\mathfrak{p}_i'$, 2) $\mathfrak{p}_x'$, 3) $\mathfrak{p}_k'$.

Nun läfst sich sowohl die Überführung des ursprünglichen Index

$$'J(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_{a_3}', \mathfrak{p}_{a_4}', \ldots, \mathfrak{p}_{a_n}'$$

in irgend eine vorgeschriebene Form

$$'J(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \ldots, \mathfrak{p}_n',$$

wie auch der nachherige Wechsel einer Charakteristik

$$c(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i+1}')$$

stets und allein durch die successiven Vertauschungen einer Anzahl von $\mathfrak{p}_1'$ freier Elementepaare erreichen. Hierzu sind in I' zunächst entsprechend der Reihe

$$\mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_{a_3}', \mathfrak{p}_{a_4}', \ldots, \mathfrak{p}_{a_n}'$$

successive die Elemente

$$\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \ldots; \mathfrak{p}_{n-1}'$$

mit allen sie von resp.

$$\mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_{n-2}'$$

trennenden Elementen in fortschreitender Folge umzuwechseln, dann gemäfs den umzukehrenden Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_{i+1}'), \quad c(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_{k+1}'), \quad c(\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_{l+1}'), \ldots$$
$$(i < k < l < \cdots)$$

die einzelnen Indices

$$'J(\mathfrak{p}_{i+1}'),\ 'J(\mathfrak{p}_{k+1}'),\ 'J(\mathfrak{p}_{l+1}'),\ \ldots$$

der Reihe nach in $'J(\mathfrak{p}_1')$ umzuwandeln, und im Anschlufs an jede solche Transformation die Inversionen der Tripel auszuführen

$$\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_{x+1}',\ \mathfrak{p}_h',$$

$$(h = x+2,\ x+3,\ \ldots,\ n,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ x).\quad \text{Q. e. d.}$$

Man kann deshalb alles zusammenfassend jetzt den Satz formulieren:

Theorem 15: Sind zwei inäquivalente in allen ihren Elementequadrupeln geometrisch-deutige Indexsysteme gegeben:

$$\mathrm{I} \equiv\ 'J_1(\mathfrak{p}_1'),\ 'J_1(\mathfrak{p}_2'),\ \ldots,\ 'J_1(\mathfrak{p}_n')$$

und

$$\overline{\mathrm{I}} \equiv '\overline{J}(\mathfrak{p}_1),\ '\overline{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{p}_n),$$

so liefert allemal ein wohlbestimmtes Verfahren zwischen beiden eine Verbindungskette von paarweise gleichfalls inäquivalenten Systemen

$$\mathrm{I},\ \mathrm{I}',\ \mathrm{I}'',\ \ldots,\ \mathrm{I}^{(\varrho)},\ \mathrm{I},$$

in welcher zwei benachbarte Systeme durch die endliche und eindeutige Inversion eines einzigen Fundamentaltripels unterschieden sind.

Die Zuordnung der Elemente von I und $\overline{\mathrm{I}}$ läfst sich von vorneherein stets so annehmen, dafs nicht nur die Transformation des Index $'J(\mathfrak{p}_1')$ sondern auch jeder Charakteristikenwechsel eines Tripels $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_x'$, $\mathfrak{p}_y'$ vermieden wird. Es beruht dies auf der durch die Voraussetzungen über beide Indexsysteme bedingten Existenz sogenannter ideeller Aufsenpolygone. Behufs des Nachweises und der Bestimmung eines solchen gehe man unter Bezug auf I von irgend drei Elementen aus

$$\mathfrak{p}_{a_1}',\ \mathfrak{p}_{a_2}',\ \mathfrak{p}_{a_3}'$$

und suche alle diejenigen Quadrupel auf

$$\mathfrak{p}_{a_1}',\ \mathfrak{p}_{a_2}',\ \mathfrak{p}_{a_3}',\ \mathfrak{p}_x',$$

deren vierte Elemente $\mathfrak{p}_x'$ innerhalb der endlichen Dreiecksfläche liegen

$$\Delta(\mathfrak{p}_{a_1}',\ \mathfrak{p}_{a_2}',\ \mathfrak{p}_{a_3}').$$

Dieselben werden bei positiver Charakteristik

$$c(\mathfrak{p}_{a_1}',\ \mathfrak{p}_{a_2}',\ \mathfrak{p}_{a_3}') = +1$$

entsprechend den Indices

$$'J(\mathfrak{p}'_{a_1}) = \mathfrak{p}'_{a_2},\ [\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_\alpha', \mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_2', \ldots, \mathfrak{r}_\beta'],\ \mathfrak{p}'_{a_3}, \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}'_{a_2}) = \mathfrak{p}'_{a_3},\ [\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_\alpha', \mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2', \ldots, \mathfrak{f}_\gamma'],\ \mathfrak{p}'_{a_1}, \ldots$$

gegeben durch:

$$\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_\alpha'.$$

Die Ausscheidung dieser Elemente wird das gegebene System auf das andere reducieren:

$$\mathfrak{P}'_{m_1} \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}'_{m_1}.$$

Aus den nach wie vor geometrisch realisierbaren Elementequadrupeln des letzteren greife man eines der Zusammensetzung heraus

$$\mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{p}'_{a_2}, \mathfrak{p}'_{a_3}, \mathfrak{p}'_{a_4}$$

und sehe zu, ob das Element $\mathfrak{p}'_{a_4}$ entweder in einer Scheitelfläche

$$F(\mathfrak{p}'_{a_1})$$

oder in einer Seitenfläche

$$F(\mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{p}'_{a_3})$$

des Dreiseites liegt

$$\Delta(\mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{p}'_{a_2}, \mathfrak{p}'_{a_3}).$$

In dem ersten Falle wird die Ausscheidung des Elementes $\mathfrak{p}'_{a_4}$ und aller anderen mit ihm der Fläche $\Delta(\mathfrak{p}'_{a_2}, \mathfrak{p}'_{a_3}, \mathfrak{p}'_{a_4})$ angehörigen Elemente ein System ergeben

$$\mathfrak{P}'_{m_2} \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}'_{m_2},$$
$$(m_2 \leqq m_1 - 1)$$

welches von dem Tripel

$$\mathfrak{p}'_{a_2}, \mathfrak{p}'_{a_3}, \mathfrak{p}'_{a_4}$$

aus dem vorherigen $\mathfrak{P}'_{m_1}$ analog zu behandeln ist.

In dem zweiten Falle betrachte man nach Elimination der Punkte von

$$\Delta(\mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{p}'_{a_3}, \mathfrak{p}'_{a_4})$$

mit Bezug auf ein noch übriges fünftes Element $\mathfrak{p}'_{a_5}$ die beiden Quadrupel

$$\mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{p}'_{a_2}, \mathfrak{p}'_{a_4}, \mathfrak{p}'_{a_5} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}'_{a_2}, \mathfrak{p}'_{a_3}, \mathfrak{p}'_{a_4}, \mathfrak{p}'_{a_5}$$

bezw. die beiden anderen

$$\mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{p}'_{a_2}, \mathfrak{p}'_{a_3}, \mathfrak{p}'_{a_5} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{p}'_{a_2}, \mathfrak{p}'_{a_4}, \mathfrak{p}'_{a_5}.$$

Nach Unterdrückung aller etwaigen Elemente der Flächen

$$\Delta(\mathfrak{p}'_{a_5}, \mathfrak{p}'_{a_1}, \mathfrak{p}'_{a_2}),\ \Delta(\mathfrak{p}'_{a_5}, \mathfrak{p}'_{a_2}, \mathfrak{p}'_{a_3}),\ \Delta(\mathfrak{p}'_{a_5}, \mathfrak{p}'_{a_3}, \mathfrak{p}'_{a_4}),\ \Delta(\mathfrak{p}'_{a_5}, \mathfrak{p}'_{a_4}, \mathfrak{p}'_{a_1})$$

wird entweder, wie vorher, ein Quadrupel

$$\mathfrak{p}'_{a_2},\ \mathfrak{p}'_{a_3},\ \mathfrak{p}'_{a_4},\ \mathfrak{p}'_{a_5}$$

oder ein Quintipel

$$\mathfrak{p}'_{a_1},\ \mathfrak{p}'_{a_2},\ \mathfrak{p}'_{a_3},\ \mathfrak{p}'_{a_4},\ \mathfrak{p}'_{a_5}$$

von der Beschaffenheit resultieren, dafs je vier seiner Elemente ein elliptisches Punktequadrupel bestimmen.

Bei der begrenzten Anzahl n der Elemente $\mathfrak{p}'_i$ mufs das vorstehende Verfahren nach höchstens $n-2$ Wiederholungen zu einer ganz bestimmten Gruppe führen:

$$\mathfrak{p}'_{a_1},\ \mathfrak{p}'_{a_2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}'_{a_m},$$

so dafs kein Element derselben, wohl aber jedes andere mit mindestens drei von ihnen ein hyperbolisches Quadrupel bildet.

Man kann weiter zeigen, dafs das dieser Gruppe zugehörige Indexsystem ein einfaches convexes m-Eck definiert. Es scheiden nämlich die eindeutig bestimmten Werte der $n-2$ Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}'_{a_1},\ \mathfrak{p}'_{a_2},\ \mathfrak{p}'_{a_h}) = \pm 1$$
$$(h = 3, 4, \ldots, m)$$

das System in zwei zur Linken und zur Rechten der Geraden

$$\mathfrak{p}'_{a_1} \text{ —— } \mathfrak{p}'_{a_2}$$

gelegene Gruppen:

$$\mathfrak{p}'_{b_1},\ \mathfrak{p}'_{b_2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}'_{b_\beta} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}'_{c_1},\ \mathfrak{p}'_{c_2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}'_{c_\gamma}.$$

Dann aber gelten gegenüber den der Voraussetzung nach elliptischen Punktquadrupeln

$$\mathfrak{p}'_{a_1},\ \mathfrak{p}'_{a_2},\ \mathfrak{p}'_{x_i},\ \mathfrak{p}'_{x_k} \quad (x = b, c) \qquad \text{bzw.} \quad \mathfrak{p}'_{a_1},\ \mathfrak{p}'_{a_2},\ \mathfrak{p}'_{x_i},\ \mathfrak{p}'_{y_k} \quad (x = b,\ y = c)$$

resp. die Indices:

$$'J(\mathfrak{p}'_{a_1}) = \mathfrak{p}'_{a_2},\ \mathfrak{p}'_{x_i},\ \mathfrak{p}'_{x_k},$$
$$'J(\mathfrak{p}'_{a_2}) = \mathfrak{p}'_{a_1},\ \mathfrak{p}'_{x_i},\ \mathfrak{p}'_{x_k},$$

bzw.

$$'J(\mathfrak{p}'_{a_1}) = \mathfrak{p}'_{a_2},\ \mathfrak{p}'_{x_i},\ \mathfrak{p}'_{y_k},$$
$$'J(\mathfrak{p}'_{a_2}) = \mathfrak{p}'_{a_1},\ \mathfrak{p}'_{y_k},\ \mathfrak{p}'_{x_i},$$

und also bestehen allgemein die Bildungen:

$$'J(\mathfrak{p}'_{a_h}) = \mathfrak{p}'_{a_1},\ \mathfrak{p}'_{a_2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}'_{a_{h-1}},\ \mathfrak{p}'_{a_{h+1}},\ \ldots,\ \mathfrak{p}'_{a_m}.$$

Einem solchen Indexsysteme entspricht bekanntlich ein einfaches positiv-convexes m-Eck

$$\mathfrak{p}'_{a_1},\ \mathfrak{p}'_{a_2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}'_{a_m},$$

und hierdurch ist das sogenannte ideelle Aufsenpolygon des ursprünglichen Indexsystemes I vollkommen und unzweideutig definiert.

Dies vorausgeschickt wird man die verlangte Transformation des Indexsystemes

$$'J_1(\mathfrak{p}_1'),\ 'J_1(\mathfrak{p}_2'),\ \ldots,\ 'J_1(\mathfrak{p}_n')$$

in das andere

$$'\bar{J}(\mathfrak{p}_1'),\ 'J_1(\mathfrak{p}_2'),\ \ldots,\ 'J_1(\mathfrak{p}_n')$$

mit den Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_i',\ \mathfrak{p}_k') = c(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k),$$

wie folgt, ausführen:

Man bestimme aus I und $\bar{\text{I}}$ die zugehörigen positiv-convexen Aufsenpolygone

$$\mathfrak{p}_{a_1}',\ \mathfrak{p}_{a_2}',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{a_m}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{b_1},\ \mathfrak{p}_{b_2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{b_{m'}},$$

und ersetze in beiden Systemen gemäfs den Indices

$$'J_1(\mathfrak{p}_{a_1}') = \mathfrak{p}_{a_2}',\ \mathfrak{p}_{l_1}',\ \mathfrak{p}_{l_2}',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{a_2}',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{a_3}',\ \ldots$$

und

$$'J(\mathfrak{p}_{b_1}) = \mathfrak{p}_{b_2},\ \mathfrak{p}_{m_1},\ \mathfrak{p}_{m_2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{b_3},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{b_4},\ \ldots$$

die Elementefolgen

$$\mathfrak{p}_{a_1}',\ \mathfrak{p}_{a_2}',\ \mathfrak{p}_{l_1}',\ \mathfrak{p}_{l_2}',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{a_3}',\ \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{b_1},\ \mathfrak{p}_{b_2},\ \mathfrak{p}_{m_1},\ \mathfrak{p}_{m_2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{b_3},\ \ldots$$

durch resp. die anderen:

$$\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ \mathfrak{p}_3',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n.$$

Die dadurch entstehenden Schemata werden die vorgesehenen Übereinstimmungen an und für sich aufweisen.

§ 12. Die Elementartransformationen eines allgemeinen Indexsystemes und dessen geometrisch-deutige Auffassungen. Fundamentale Indicesgruppen.

Die Resultate des vorigen Paragraphen auf Indexsysteme allgemeinen Charakters auszudehnen, betrachte man zwei formal bestimmte Schemata:

$$\text{I}' \equiv J(\mathfrak{p}_1'),\ J(\mathfrak{p}_2'),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_n') \quad \text{und} \quad \bar{\text{I}} \equiv \bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ \bar{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ \bar{J}(\mathfrak{p}_n).$$

Hier ist die Aufgabe der Elementartransformation des einen in das andere System an sich unbestimmt, und sie erhält erst mit der Fixion des Drehungssinnes jedes einzelnen Index eigentliche Bedeutung. Man denke sich daher das eine System $\bar{\text{I}}$ von vorneherein durch eine be-

liebige eindeutige Darstellung repräsentiert:

$$\bar{\mathrm{I}} \equiv {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ {}'J(\mathfrak{p}_n),$$

betreffs des anderen I′ dagegen nur für zwei Indices die Drehungsrichtungen festgelegt:

$$\mathrm{I}' \equiv {}'J(\mathfrak{p}_1'),\ {}'J(\mathfrak{p}_2'),\ J(\mathfrak{p}_3'),\ J(\mathfrak{p}_4'),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_n').$$

Auf diese Schemata lassen sich die früher (pag. 130 und 206) entwickelten in einfachen Elementwechseln bestehenden Transformationsmethoden ohne weiteres anwenden, und sich mit ihrer Hülfe zunächst der Index ${}'J(\mathfrak{p}_1')$ in ${}'\bar{J}(\mathfrak{p}_1')$, darauf unter Festhaltung desselben der entsprechend veränderte ${}'J_1(\mathfrak{p}_2')$ in ${}'\bar{J}(\mathfrak{p}_2')$ transformieren. Dadurch gewinnen die beiden Systeme die Formen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}')\ {}'J(\mathfrak{p}_1') &= \mathfrak{p}_2',\ \mathfrak{p}_3',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n',\\
{}'J(\mathfrak{p}_2') &= \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_{a_3}',\ \mathfrak{p}_{a_4}',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{a_n}',\\
J(\mathfrak{p}_3') &= \mathfrak{p}_1',\ [\mathfrak{q}_1',\ \ldots,\ \mathfrak{q}_{\alpha_1}'],\ \mathfrak{p}_2',\ [\mathfrak{r}_1',\ \ldots,\ \mathfrak{r}_{\alpha_2}'],\\
J(\mathfrak{p}_4') &= \mathfrak{p}_1',\ [\mathfrak{s}_1',\ \ldots,\ \mathfrak{s}_{\beta_1}'],\ \mathfrak{p}_2',\ [\mathfrak{t}_1',\ \ldots,\ \mathfrak{t}_{\beta_2}'],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
\bar{\mathrm{I}})\ {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_1) &= \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n,\\
{}'J(\mathfrak{p}_2) &= \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{a_3},\ \mathfrak{p}_{a_4},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{a_n},\\
{}'\bar{J}(\mathfrak{p}_3) &= \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{q}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_{\alpha_1},\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{r}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_{\alpha_2},\\
{}'\bar{J}(\mathfrak{p}_4) &= \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{s}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{s}_{\beta_1},\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{t}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{t}_{\beta_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Gesetzt nun, es zeigen die Indices

$$J(\mathfrak{p}_3') \quad \text{und} \quad {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_3)$$

entsprechend den zugeordneten Drehungsrichtungen

$$\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{q}_i',\ \mathfrak{p}_2',\ \mathfrak{r}_k' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{r}_k$$

die differierenden Bildungen:

$$\begin{aligned}
J(\mathfrak{p}_3') &= \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{q}_1',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_5',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_4',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_2',\ [\mathfrak{r}_1',\ \mathfrak{r}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{r}_{\alpha_2}'],\\
{}'\bar{J}(\mathfrak{p}_3) &= \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{q}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_4,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_5,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{r}_1,\ \mathfrak{r}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_{\alpha_2},
\end{aligned}$$

so bestehen in den Partialsystemen

$$\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ \mathfrak{p}_3',\ \mathfrak{p}_4',\ \mathfrak{p}_5' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_4,\ \mathfrak{p}_5$$

notwendig die Indices:

$$\begin{aligned}
J(\mathfrak{p}_4') &= \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ (\mathfrak{p}_3',\ \mathfrak{p}_5'), \qquad \text{und} \qquad \bar{J}(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ (\mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_5),\\
J(\mathfrak{p}_5') &= \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ (\mathfrak{p}_3',\ \mathfrak{p}_4') \qquad\qquad\quad \bar{J}(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ (\mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_4).
\end{aligned}$$

Denn da unter den nach Theorem (6c) allein noch in Frage kommenden Annahmen

$$J(\mathfrak{p}_4') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_5', \quad J(\mathfrak{p}_5') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_4' \quad \text{und} \quad \bar{J}(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \quad \bar{J}(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4$$

die vier Relationen erfüllt sind

$$J(\mathfrak{p}_1') = \bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2') = \bar{J}(\mathfrak{p}_2),\ J(\mathfrak{p}_4') = \bar{J}(\mathfrak{p}_4),\ J(\mathfrak{p}_5') = \bar{J}(\mathfrak{p}_5),$$

und dann nach Theorem (4) auch die fünfte gilt

$$J(\mathfrak{p}_3') = \bar{J}(\mathfrak{p}_3),$$

ergiebt sich in diesem Falle ein Widerspruch mit der Voraussetzung.

Wenn also für zwei charakterisierte Indexsysteme

$$J(\mathfrak{p}_1'), \ldots, J(\mathfrak{p}_n') \quad \text{und} \quad \bar{J}(\mathfrak{p}_1), \ldots, \bar{J}(\mathfrak{p}_n)$$

zwei Paare korrespondierender Indices ganz analog gebildet sind,

$$'J(\mathfrak{p}_1') = '\bar{J}(\mathfrak{p}_1) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_2') = '\bar{J}(\mathfrak{p}_2),$$

in einem dritten Paare aber mindestens je zwei entsprechende Elemente in entgegengesetzter Folge auftreten,

$$J(\mathfrak{p}_3') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_i', \ldots, \mathfrak{p}_k', \ldots, \mathfrak{p}_2', \ldots, \quad \bar{J}(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k, \ldots, \mathfrak{p}_i, \ldots, \mathfrak{p}_2, \ldots,$$

so werden in den 2 . 2 Indices

$$J(\mathfrak{p}_i'),\ J(\mathfrak{p}_k') \quad \text{und} \quad \bar{J}(\mathfrak{p}_i),\ \bar{J}(\mathfrak{p}_k)$$

die Elementedupel

$$\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_k';\ \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_i' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_k;\ \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_i$$

resp. die anderen

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$$

nicht trennen.

Auf Grund dieses und eines früheren Satzes kann man aber den Index $J(\mathfrak{p}_3')$ ohne Alteration von $'J(\mathfrak{p}_1')$ und $'J(\mathfrak{p}_2')$ in den vorgeschriebenen $J(\mathfrak{p}_3')$ elementar überführen und erhält dadurch die Systeme:

$$'J(\mathfrak{p}_1') = \bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ 'J(\mathfrak{p}_2') = '\bar{J}(\mathfrak{p}_2),\ J(\mathfrak{p}_3') = \bar{J}(\mathfrak{p}_3),$$
$$J(\mathfrak{p}_h') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{f}_{h_1}', \mathfrak{f}_{h_2}', \ldots, \mathfrak{p}_2', \mathfrak{t}_{h_1}', \mathfrak{t}_{h_2}', \ldots, \mathfrak{p}_3', \mathfrak{x}_{h_1}', \mathfrak{x}_{h_2}', \ldots,$$
$$\bar{J}(\mathfrak{p}_h) = \mathfrak{p}_1, \bar{\mathfrak{f}}_{h_1}, \bar{\mathfrak{f}}_{h_2}, \ldots, \mathfrak{p}_2, \bar{\mathfrak{t}}_{h_1}, \bar{\mathfrak{t}}_{h_2}, \ldots, \mathfrak{p}_3, \bar{\mathfrak{x}}_{h_1}, \bar{\mathfrak{x}}_{h_2}, \ldots,$$
$$h = 4, 5, \ldots, n.$$

Gesetzt, die Indices

$$J(\mathfrak{p}_4') \quad \text{und} \quad \overline{J}(\mathfrak{p}_4)$$

enthielten die differierenden Elementefolgen

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{f}_1', \ldots, \mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_l', \ldots, \mathfrak{p}_2' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l, \ldots, \mathfrak{p}_m, \ldots, \mathfrak{p}_2,$$

so ergiebt ein analoger Schlufs betreffs der Bildungsweisen der Indices

$$J(\mathfrak{p}_l') \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_{m'}),$$

dafs innerhalb derselben kein einziges der drei Elementepaare

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2'; \quad \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3'; \quad \mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_1'$$

durch resp. die vierten

$$\mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_{m'} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_l'$$

von einander geschieden wird, d. h. es gehören diese letzten zwei Paare in resp. den Indices

$$J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{f}_{l_1}', \mathfrak{f}_{l_2}', \ldots, \mathfrak{p}_2', \mathfrak{t}_{l_1}', \mathfrak{t}_{l_2}', \ldots, \mathfrak{p}_3', \mathfrak{x}_{l_1}', \mathfrak{x}_{l_2}', \ldots,$$

$$J(\mathfrak{p}_{m'}) = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{f}_{m_1}', \mathfrak{f}_{m_2}', \ldots, \mathfrak{p}_2', \mathfrak{t}_{m_1}', \mathfrak{t}_{m_2}', \ldots, \mathfrak{p}_3', \mathfrak{x}_{m_1}', \mathfrak{x}_{m_2}', \ldots$$

zu je einer der 2 . 3 Reihen:

$$\mathfrak{f}_{h_1}', \mathfrak{f}_{h_2}', \ldots; \quad \mathfrak{t}_{h_1}', \mathfrak{t}_{h_2}', \ldots; \quad \mathfrak{x}_{h_1}', \mathfrak{x}_{h_2}', \ldots .$$

Laut Theorem (13) kann man deshalb auch den Index $J(\mathfrak{p}_4')$ ohne Störung der drei anderen $'\overline{J}(\mathfrak{p}_1')$, $'\overline{J}(\mathfrak{p}_2')$, $\overline{J}(\mathfrak{p}_3')$ elementar in $\overline{J}(\mathfrak{p}_4')$ umformen.

Es liegt auf der Hand, dafs die vorstehende Schlufsweise anwendbar bleibt, bis $n - 2$ Indices

$$J(\mathfrak{p}_1'), J(\mathfrak{p}_2'), J(\mathfrak{p}_3'), J(\mathfrak{p}_4'), \ldots, J(\mathfrak{p}_{n-2}')$$

successive auf die Formen gebracht sind:

$$'\overline{J}(\mathfrak{p}_1'), '\overline{J}(\mathfrak{p}_2'), \overline{J}(\mathfrak{p}_3'), \overline{J}(\mathfrak{p}_4'), \ldots, \overline{J}(\mathfrak{p}_{n-2}').$$

Ich behaupte, dafs alsdann die beiden noch übrigen Indices

$$J(\mathfrak{p}_{n-1}') \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_n')$$

gleichfalls die Darstellungen zeigen:

$$\overline{J}(\mathfrak{p}_{n-1}') \quad \text{und} \quad \overline{J}(\mathfrak{p}_n').$$

Zum Beweise gehe man wiederum aus von den Partialsystemen

$$J(\mathfrak{p}_1'), J(\mathfrak{p}_2'), \ldots, J(\mathfrak{p}_5') \quad \text{und} \quad \overline{J}(\mathfrak{p}_1), \overline{J}(\mathfrak{p}_2), \ldots, \overline{J}(\mathfrak{p}_5).$$

Angenommen, es bestehen zwischen denselben die Beziehungen

$$J(\mathfrak{p}_1') = \bar{J}(\mathfrak{p}_1), \quad J(\mathfrak{p}_2') = \bar{J}(\mathfrak{p}_2),$$
$$J(\mathfrak{p}_3') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5' \neq \bar{J}(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4,$$

und also auch die Indices

$$J(\mathfrak{p}_4') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', (\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_5'), \quad \bar{J}(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, (\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5),$$
$$J(\mathfrak{p}_5') = \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', (\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4') \quad \text{und} \quad \bar{J}(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, (\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4),$$

so hat man a priori drei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

1) $J(\mathfrak{p}_4') = \bar{J}(\mathfrak{p}_4)$ und $J(\mathfrak{p}_5') = \bar{J}(\mathfrak{p}_5)$,
2) $J(\mathfrak{p}_4') = \bar{J}(\mathfrak{p}_4)$ und $J(\mathfrak{p}_5') \neq \bar{J}(\mathfrak{p}_5)$,
3) $J(\mathfrak{p}_4') \neq \bar{J}(\mathfrak{p}_4)$ und $J(\mathfrak{p}_5') \neq \bar{J}(\mathfrak{p}_5)$.

Im ersten Falle folgt aus den vier Relationen

$$J(\mathfrak{p}_1') = \bar{J}(\mathfrak{p}_1), \quad J(\mathfrak{p}_2') = \bar{J}(\mathfrak{p}_2); \quad J(\mathfrak{p}_4') = \bar{J}(\mathfrak{p}_4), \quad J(\mathfrak{p}_5') = \bar{J}(\mathfrak{p}_5)$$

nach Theorem (4) auch die fünfte

$$J(\mathfrak{p}_3') = \bar{J}(\mathfrak{p}_3);$$

es resultiert demnach ein Widerspruch mit der Voraussetzung.

Im zweiten Falle transformiere man das Indexsystem

$$J(\mathfrak{p}_1'), J(\mathfrak{p}_2'), J(\mathfrak{p}_3'), J(\mathfrak{p}_4'), J(\mathfrak{p}_5')$$

durch die Inversion des Fundamentaltripels $\mathfrak{p}_3', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_5'$ in das andere

$$J(\mathfrak{p}_1'), J(\mathfrak{p}_2'), J_1(\mathfrak{p}_3'), J_1(\mathfrak{p}_4'), J_1(\mathfrak{p}_5'),$$

für welches die Beziehungen statthaben:

$$J(\mathfrak{p}_1') = J(\mathfrak{p}_1), \quad J(\mathfrak{p}_2') = \bar{J}(\mathfrak{p}_2), \quad J_1(\mathfrak{p}_3') = \bar{J}(\mathfrak{p}_3), \quad J_1(\mathfrak{p}_5') = J(\mathfrak{p}_5),$$
$$J_1(\mathfrak{p}_4') \neq J(\mathfrak{p}_4).$$

Da die Coexistenz letzterer wiederum gegen das Theorem (4) verstöfst, ist nicht nur dieses System, sondern auch jedes aus ihm elementar abgeleitete und folglich auch das ursprüngliche illusorisch.

Im dritten Falle endlich führt die Inversion desselben Fundamentaltripels zu den Relationen:

$$J(\mathfrak{p}_1') = \bar{J}(\mathfrak{p}_1), \quad J(\mathfrak{p}_2') = \bar{J}(\mathfrak{p}_2),$$
$$J_1(\mathfrak{p}_3') = \bar{J}(\mathfrak{p}_3), \quad J_1(\mathfrak{p}_4') = \bar{J}(\mathfrak{p}_4), \quad J_1(\mathfrak{p}_5') = \bar{J}(\mathfrak{p}_5),$$

und es ist daher mit dem einen auch das andere System existent.

Wenn also in zwei Indexsystemen

$$J(\mathfrak{p}_1'),\ J(\mathfrak{p}_2'),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_5') \quad \text{und} \quad \bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ \bar{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ \bar{J}(\mathfrak{p}_5)$$

zwei Paare entsprechender Indices gleich gebildet sind,

$$J(\mathfrak{p}_1') = \bar{J}(\mathfrak{p}_1) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_2') = \bar{J}(\mathfrak{p}_2),$$

so gilt das nämliche entweder von keinem einzigen oder von jedem weiteren solchen Paare;
oder:

Wenn zwei Indexsysteme

$$J(\mathfrak{p}_1'),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_5') \quad \text{und} \quad \bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ \ldots,\ \bar{J}(\mathfrak{p}_5)$$

in drei Paaren korrespondierender Indices übereinstimmen,

$$J(\mathfrak{p}_1') = \bar{J}(\mathfrak{p}_1),\quad J(\mathfrak{p}_2') = \bar{J}(\mathfrak{p}_2),\quad J(\mathfrak{p}_3') = \bar{J}(\mathfrak{p}_3),$$

so gleichen sie sich auch in den beiden anderen,

$$J(\mathfrak{p}_4') = \bar{J}(\mathfrak{p}_4) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_5') = \bar{J}(\mathfrak{p}_5).$$

Hiernach zeigen die oben ermittelten zwei Indexsysteme

$$J(\mathfrak{p}_1'),\ J(\mathfrak{p}_2'),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_n') \quad \text{und} \quad \bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ \bar{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ \bar{J}(\mathfrak{p}_n)$$

gemäfs den Relationen

$$J(\mathfrak{p}_1') = \bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2') = \bar{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_{n-2}') = \bar{J}(\mathfrak{p}_{n-2})$$

in den noch übrigen Paaren

$$J(\mathfrak{p}_{n-1}'),\ \bar{J}(\mathfrak{p}_{n-1}) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_n'),\ \bar{J}(\mathfrak{p}_n)$$

zunächst rücksichtlich je zweier entsprechenden Elementequadrupel

$$\mathfrak{p}_i',\ \mathfrak{p}_k',\ \mathfrak{p}_l'\ \mathfrak{p}_m' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_m,$$

dann aber laut einem auf pag. 54 bereits angewandten Schlusse auch gegenüber den vollständigen Systemen

$$\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n$$

analog geordnete Elementefolgen. Q. e. d.

Nunmehr kann man das Theorem (15) zu dem allgemeineren erweitern:

15a. Jedes charakterisierte Indexsystem

$$J_1(\mathfrak{p}_1),\ J_1(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J_1(\mathfrak{p}_n)$$

läfst sich in irgend ein anderes

$$J(\mathfrak{p}_1),\ \bar{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ \bar{J}(\mathfrak{p}_n)$$

durch die Inversionen einer bestimmten Folge von Fundamentaltripeln überführen.

Eine unmittelbare bedeutsame Anwendung des Satzes bietet die fundamentale Frage nach etwaigen in erweitertem Sinne geometrisch-deutigen Darstellungen eines allgemeinen Indexsystemes

$$\bar{\text{I}})\ \bar{J}(\mathfrak{p}_1'),\ \bar{J}(\mathfrak{p}_2'),\ \ldots,\ \bar{J}(\mathfrak{p}_n').$$

Sie zu entscheiden, bestimme man eine dasselbe in das eigentliche Indexsystem

$$\text{I})\ {}'J(\mathfrak{p}_h') = \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{h-1}',\ \mathfrak{p}_{h+1}',\ \mathfrak{p}_{h+2}',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n'$$
$$(h = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

überführende Inversionenfolge von Tripeln:

$$\mathfrak{T}_\varrho',\ \mathfrak{T}_{\varrho-1}',\ \ldots,\ \mathfrak{T}_2',\ \mathfrak{T}_1'.$$

In der dadurch entstehenden, den Übergang von I zu $\bar{\text{I}}$ vermittelnden Folge von Zwischensystemen

$$\text{I},\ \text{I}_1,\ \text{I}_2,\ \text{I}_3,\ \ldots,\ \text{I}_{\varrho-1},\ \bar{\text{I}}$$

werden die aus I durch die Inversionen der Tripel

$$\mathfrak{T}_1',\ \mathfrak{T}_2',\ \mathfrak{T}_3',\ \ldots$$

entstanden gedachten Systeme

$$\text{I}_1,\ \text{I}_2,\ \text{I}_3,\ \ldots$$

soweit den verallgemeinerten geometrischen Charakter bewahren, als nur Fundamentaltripel mit endlichen Hauptpunkten zur Inversion gelangen. Gesetzt, es sei I_{m_1} das erste System, in welchem das Fundamentaltripel

$$\mathfrak{T}_{m_1+1}' \equiv \mathfrak{p}_{i_1}',\ \mathfrak{p}_{k_1}',\ \mathfrak{p}_{l_1}'$$

den Primärbereich definiert

$$\mathfrak{p}_\infty' \mid \mathfrak{p}_{i_1}',\ \mathfrak{p}_{k_1}',\ \mathfrak{p}_{l_1}'.$$

Indem man deshalb aufser dem Stellenwechsel der Elementepaare

$$\mathfrak{p}_{k_1}',\ \mathfrak{p}_{l_1}';\quad \mathfrak{p}_{l_1}',\ \mathfrak{p}_{i_1}';\quad \mathfrak{p}_{i_1}',\ \mathfrak{p}_{k_1}'$$

in resp.

$${}'J(\mathfrak{p}_{i_1}'),\quad {}'J(\mathfrak{p}_{k_1}'),\quad {}'J(\mathfrak{p}_{l_1}')$$

noch die Inversion eines dieser drei Indices vollzieht, also etwa statt ${}'J(\mathfrak{p}_{i_1}')$ fortan $J'(\mathfrak{p}_{i_1}')$ schreibt, und das resultierende gleichfalls geometrisch-deutige Schema als das System I_{m_1+1} auffafst, wird man, da die Richtungsänderung eines Index den Bestand an Fundamentaltripeln nicht beeinflufst, die Inversionen der folgenden Tripel

$$\mathfrak{T}_{m_1+2}',\quad \mathfrak{T}_{m_1+3}',\ \ldots$$

unter Wahrung des geometrischen Charakters der entstehenden Systeme

$$I_{m_1+2}, \quad I_{m_1+3}, \ldots$$

wieder bis zu demjenigen Systeme

$$I_{m_2}$$

fortsetzen können, in welchem das Fundamentaltripel

$$\mathfrak{T}'_{m_2+1} \equiv \mathfrak{p}'_{i_2}, \ \mathfrak{p}'_{k_2}, \ \mathfrak{p}'_{l_2}$$

den Primärbereich involviert

$$\mathfrak{p}'_\infty \mid \mathfrak{p}'_{i_2}, \ \mathfrak{p}'_{k_2}, \ \mathfrak{p}'_{l_2}.$$

Hier stellt die Inversion des Index $'J(\mathfrak{p}'_{i_2})$ für diejenigen der Tripel

$$\mathfrak{T}'_{m_2+1}, \ \mathfrak{T}'_{m_2+2}, \ldots$$

die erforderlichen realen Grundlagen wieder her, und es kann die Transformation unter den alten Bedingungen weitergeführt werden.

Es läfst sich mithin das eigentliche Indexsystem

$$\text{I)} \ 'J(\mathfrak{p}_1'), \ 'J(\mathfrak{p}_2'), \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_n')$$

in eine bestimmte Darstellung des nur charakterisierten

$$\bar{\text{I}}) \ \bar{J}(\mathfrak{p}_1'), \ \bar{J}(\mathfrak{p}_2'), \ldots, \ \bar{J}(\mathfrak{p}_n')$$

durch die Inversionen einer Folge von Tripeln transformieren

$$\mathfrak{T}_1', \ \mathfrak{T}_2', \ldots, \ \mathfrak{T}_{\varrho-1}', \ \mathfrak{T}_\varrho',$$

welche sämtlich, geometrisch wohl definiert, die erweiterte Construierbarkeit der abgeleiteten Zwischensysteme nicht stören.

Man denke sich jetzt dieselbe Folge von Inversionen

$$\mathfrak{T}_1', \ \mathfrak{T}_2', \ldots, \ \mathfrak{T}_\varrho'$$

nebst den Richtungswechseln der Indices

$$'J(\mathfrak{p}'_{i_1}), \ 'J(\mathfrak{p}'_{i_2}), \ldots$$

auf ein mit I äquivalentes System I′ angewandt,

$$\text{I′}) \ 'J(\mathfrak{p}_1'), \ 'J(\mathfrak{p}_2'), \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}'_m),$$
$$J'(\mathfrak{p}'_{m+1}), \ J'(\mathfrak{p}'_{m+2}), \ldots, \ J'(\mathfrak{p}'_n).$$

Da die Inversion eines einzelnen Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}'_i, \ \mathfrak{p}'_k, \ \mathfrak{p}'_l$$

zwei entgegengesetzte Indices

$$'J(\mathfrak{p}_h') = \mathfrak{p}'_{h_1}, \ \mathfrak{p}'_{h_2}, \ldots, \ \mathfrak{p}'_{h_{n-1}} \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_h') = \mathfrak{p}'_{h_{n-1}}, \ \mathfrak{p}'_{h_{n-2}}, \ldots, \ \mathfrak{p}'_{h_1}$$

entweder überhaupt nicht berührt,

$$(h \neq i, k, l)$$

oder in beiden die nämlichen zwei Nachbarelemente vertauscht,

$$'J(\mathfrak{p}_h') = \mathfrak{p}_{h_1}', \mathfrak{p}_{h_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{h_{a-1}}', \mathfrak{p}_{h_{a+1}}', \mathfrak{p}_{h_a}', \mathfrak{p}_{h_{a+2}}', \ldots, \mathfrak{p}_{h_{n-1}}',$$

$$'J(\mathfrak{p}_h') = \mathfrak{p}_{h_{n-1}}', \mathfrak{p}_{h_{n-2}}', \ldots, \mathfrak{p}_{h_{a+2}}', \mathfrak{p}_{h_a}', \mathfrak{p}_{h_{a+1}}', \mathfrak{p}_{h_{a-1}}', \ldots, \mathfrak{p}_{h_1}',$$

oder endlich auch noch die Drehungsrichtungen umkehrt,

$$'J(\mathfrak{p}_h') = \mathfrak{p}_{h_{n-1}}', \mathfrak{p}_{h_{n-2}}', \ldots, \mathfrak{p}_{h_{a+2}}', \mathfrak{p}_{h_a}', \mathfrak{p}_{h_{a+1}}', \mathfrak{p}_{h_{a-1}}', \ldots, \mathfrak{p}_{h_1}',$$

$$'J(\mathfrak{p}_h') = \mathfrak{p}_{h_1}', \mathfrak{p}_{h_2}', \ldots, \mathfrak{p}_{h_{a-1}}', \mathfrak{p}_{h_{a+1}}', \mathfrak{p}_{h_a}', \mathfrak{p}_{h_{a+2}}', \ldots, \mathfrak{p}_{h_{n-1}}',$$

in jedem Falle also wieder zu entgegengesetzten Indices führt, so verwandeln sich zwei in den äquivalenten Systemen

$$\text{I} \quad \text{und} \quad \text{I}'$$

inverse Indices

$$'J(\mathfrak{p}_{m+h}') \quad \text{und} \quad J'(\mathfrak{p}_{m+h}')$$

vermöge der vollständigen Inversionsfolge

$$\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_\varrho'$$

wieder in inverse Indices

$$'\overline{J}(\mathfrak{p}_{m+h}') \quad \text{und} \quad \overline{J}'(\mathfrak{p}_{m+h}')$$

der resultierenden gleichfalls äquivalenten Systeme

$$\bar{\text{I}} \quad \text{und} \quad \bar{\text{I}}'.$$

Hieraus und aus der § 11 bewiesenen Existenz von genau $1 + \frac{1}{2} n(n-1)$ unter einander äquivalenten eindeutigen Repräsentationen eines eigentlichen Indexsystemes folgt der fundamentale Satz:

Theorem 16. Jedes charakterisierte Indexsystem involviert $1 + \frac{1}{2} n(n-1)$ bestimmte Darstellungen des speciellen Charakters, dafs innerhalb einer jeden die Gruppe der Elementetripel vollkommen und unzweideutig definiert ist.

Noch ein zweites bereits in § 5 und § 7 behandeltes allgemeines Problem findet durch das obige Transformationsverfahren seine endgültige Erledigung, nämlich die Frage nach den zwischen den Indices eines Systemes bestehenden gegenseitigen Abhängigkeiten.

Man deduziert zuerst den Satz:

Wenn zwei Indexsysteme

$$J_1(\mathfrak{p}_1), J_1(\mathfrak{p}_2), \ldots, J_1(\mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad \overline{J}(\mathfrak{p}_1), \overline{J}(\mathfrak{p}_2), \ldots, \overline{J}(\mathfrak{p}_n)$$

in m Paaren entsprechender Indices übereinstimmen,

$$J_1(\mathfrak{p}_1) = \overline{J}(\mathfrak{p}_1), \quad J_1(\mathfrak{p}_2) = \overline{J}(\mathfrak{p}_2), \quad \ldots, \quad J_1(\mathfrak{p}_m) = \overline{J}(\mathfrak{p}_m),$$

in den $n - m$ anderen aber abweichen,

$$J_1(\mathfrak{p}_{m+h}) \neq \overline{J}(\mathfrak{p}_{m+h}),$$

so existiert in dem einen wie in dem anderen mindestens je ein aus drei Elementen

$$\mathfrak{p}_{m+i}, \ \mathfrak{p}_{m+k}, \ \mathfrak{p}_{m+l}$$

gebildetes Fundamentaltripel.

Aus den durch die Voraussetzung bedingten Formen

$$J_1(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_{a_1}, \ \mathfrak{q}_1, \ \ldots, \ \mathfrak{q}_i, \ \mathfrak{q}_{i+1}, \ \ldots, \ \mathfrak{q}_\alpha, \ \mathfrak{p}_{a_2}, \ \mathfrak{r}_1, \ \ldots, \ \mathfrak{r}_\varrho,$$
$$\mathfrak{p}_{a_3}, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_{a_m}, \ \mathfrak{x}_1, \ \ldots, \ \mathfrak{x}_\xi,$$

$$\overline{J}(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_{a_1}, \ \overline{\mathfrak{q}}_1, \ \ldots, \ \mathfrak{q}_{i+1}, \ \ldots, \ \mathfrak{q}_i, \ \ldots, \ \overline{\mathfrak{q}}_\alpha, \ \mathfrak{p}_{a_2}, \ \overline{\mathfrak{r}}_1, \ \ldots, \ \overline{\mathfrak{r}}_\varrho,$$
$$\mathfrak{p}_{a_3}, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_{a_m}, \ \overline{\mathfrak{x}}_1, \ \ldots, \ \overline{\mathfrak{x}}_\xi$$
$$(\mathfrak{p}_{a_1}, \ \mathfrak{p}_{a_2}, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_{a_m} = [\mathfrak{p}_1, \ \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_m])$$

folgen nämlich die anderen:

$$J_1(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_{m+1}, \ \mathfrak{t}_1, \ \ldots, \ \mathfrak{t}_\tau, \ \mathfrak{q}_{i+1}, \ \ldots, \ J_1(\mathfrak{q}_{i+1}) = \mathfrak{p}_{m+1}, \ [\mathfrak{t}_1, \ \ldots, \ \mathfrak{t}_\tau], \ \mathfrak{q}_i, \ \ldots,$$

wo die Elemente

$$\mathfrak{t}_1, \ \mathfrak{t}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{t}_\tau, \ \mathfrak{q}_i, \ \mathfrak{q}_{i+1}$$

sämtlich der Reihe angehören

$$\mathfrak{p}_{m+2}, \ \mathfrak{p}_{m+3}, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_n.$$

Dann aber existiert nach Theorem (13) notwendig ein Fundamentaltripel von einer der Formen:

$$\mathfrak{q}_i, \ \mathfrak{q}_{i+1}, \ \mathfrak{t}_h; \quad \mathfrak{q}_i, \ \mathfrak{t}_{h_1}, \ \mathfrak{t}_{h_2}; \quad \mathfrak{q}_{i+1}, \ \mathfrak{t}_{h_1}, \ \mathfrak{t}_{h_2}. \quad \text{Q. e. d.}$$

Der Satz involviert das bemerkenswerte

Theorem 17. Teilt man unter Annahme eines beliebigen Indexsystemes

$$J(\mathfrak{p}_1), \ J(\mathfrak{p}_2), \ \ldots, \ J(\mathfrak{p}_n)$$

die n Elemente $\mathfrak{p}_i$ so in zwei Gruppen

$$\mathfrak{p}_1, \ \mathfrak{p}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{m+1}, \ \mathfrak{p}_{m+2}, \ \ldots, \ \mathfrak{p}_n,$$

dafs einerseits zu jedem Elemente der ersten Gruppe mindestens ein Fundamentaltripel gehört, welches zwei Elemente der zweiten Gruppe enthält, andererseits in jedem

Fundamentaltripel mindestens ein Element der ersten Gruppe vertreten ist, so werden durch die m Indices

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_m)$$

die $n - m$ übrigen

$$J(\mathfrak{p}_{m+1}),\ J(\mathfrak{p}_{m+2}),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_n)$$

bis auf ihre Drehungsrichtungen eindeutig bestimmt.

Denn angenommen, es beständen besagte m Indices noch in einem zweiten von dem gegebenen I verschiedenen Systeme

$$\text{II)}\quad J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_m),$$
$$J_1(\mathfrak{p}_{m+1}),\ J_1(\mathfrak{p}_{m+2}),\ \ldots,\ J_1(\mathfrak{p}_n),$$

so würden gemäfs den obigen Bezeichnungen die beiden Indices gelten:

$$\text{I)}\quad J(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_{a_1},\ \mathfrak{q}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_{i+1},\ \mathfrak{q}_i,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_\alpha,\ \mathfrak{p}_{a_2},\ \ldots,$$

$$\text{II)}\quad J_1(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_{a_1},\ \bar{\mathfrak{q}}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_i,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_{i+1},\ \ldots,\ \bar{\mathfrak{q}}_\alpha,\ \mathfrak{p}_{a_2},\ \ldots.$$

Dann aber müfste nach dem vorigen Satze das System I entgegen der Voraussetzung ein Tripel der Zusammensetzung enthalten:

$$\mathfrak{p}_{m+h_1},\ \mathfrak{p}_{m+h_2},\ \mathfrak{p}_{m+h_3}.$$

Dafs thatsächlich alle m Indices $J(\mathfrak{p}_i)$ notwendig sind, das System I zu bestimmen, folgt aus dem ersten Teile der Voraussetzung. Wäre nämlich einer von ihnen überflüssig, so würde durch die Inversion des zu dem betreffenden Elemente $\mathfrak{p}_i$ gehörigen Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_{m+k},\ \mathfrak{p}_{m+l}$$

ein zweites von dem gegebenen verschiedenes Indexsystem geschaffen werden, welches mit ihm in den ersten $m - 1$ Indices übereinstimmt.

Im Besonderen folgt der oben bereits direkt bewiesene Satz:

Jedes charakterisierte Indexsystem ist durch $n - 2$ Indices vollkommen definiert.

Um eine dem Hauptsatze entsprechende Teilung des Systemes zu erhalten, gehe man aus von irgend drei kein Fundamentaltripel konstituierenden Elementen

$$\mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{p}_{n-1},\ \mathfrak{p}_{n-2}$$

und bestimme alle Fundamentaltripel, in welchen zwei von ihnen auftreten. Unter den durch diese Fundamentaltripel noch nicht absorbierten Elementen wähle man ein viertes zum Elemente $\mathfrak{p}_{n-3}$ und suche alle dieses und eines der drei früheren Elemente enthaltenden Fundamentaltripel. Nach Ausscheidung der dritten Elemente letzterer

nehme man eines der noch übrigen zum Elemente $\mathfrak{p}_{n-1}$ und fahre in dieser Bestimmungsweise der Gruppe

$$\mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{p}_{n-1},\ \mathfrak{p}_{n-2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{m+1}$$

solange fort, bis man zu einem Elemente $\mathfrak{p}_{m+1}$ gelangt, dessen Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{m+h},\ \mathfrak{p}_i$$

sämtliche aufserdem noch vorhandenen Elemente umfassen. Dann repräsentieren die Gruppen

$$\mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{p}_{n-1},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{m+1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_m$$

eine Teilung des verlangten Charakters.

Man kann zu jedem beliebigen n ganz allgemein eine kleinste Zahl von Indices angeben, welche durch die übrigen bestimmt sind. — Denn da die Elemente

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_m$$

als diejenigen definiert sind, welche mit mindestens je einem Paare

$$\mathfrak{p}_{m+i},\ \mathfrak{p}_{m+k}$$

ein Fundamentaltripel konstituieren, wird ihre Anzahl ein Maximum darstellen, wenn möglichst viele der letztgenannten Elementepaare mit möglichst vielen, also mit je zwei Elementen $\mathfrak{p}_h$ Fundamentaltripel bilden. Hiernach können $n - m = m'$ Elemente $\mathfrak{p}_{m+h}$ höchstens $m'(m'-1)$ Elemente $\mathfrak{p}_h$ vindicieren. Es ergiebt sich daher zur Bestimmung von m' die Beziehung:

$$m'^2 \leqq n < (m'+1)^2,$$

und diese liefert, je nachdem n ein volles Quadrat ist, oder nicht, für m' die Werte:

$$m' = E(\sqrt{n}) \quad \text{oder} \quad m' = 1 + E(\sqrt{n}).$$

Es gilt mithin als Ergänzung zu Theorem (17):

17a. In jedem allgemeinen Indexsysteme von n Elementen giebt es stets $E(\sqrt{n})$ Indices, welche durch die übrigen bis auf den Drehungssinn unzweideutig fixiert sind.

Es kann im Besonderen vorkommen, dafs die beiden Gruppen

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_m) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{p}_{m+1}),\ J(\mathfrak{p}_{m+2}),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_n)$$

sich wechselseitig bestimmen.

Die Bedingungen dafür sind, dafs einerseits kein Fundamentaltripel von einer der Formen auftritt

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{m+i},\ \mathfrak{p}_{m+k},\ \mathfrak{p}_{m+l},$$

andererseits zu jedem Elemente

$$\mathfrak{p}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{p}_{m+i}$$

ein Fundamentaltripel des Typus gehört

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_{m+k},\ \mathfrak{p}_{m+l} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{p}_{m+i},\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l.$$

So genügen beispielsweise in dem Indexsysteme eines einfachen convexen $2n$-Eckes

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{2n}$$

gemäfs den Fundamentaltripeln

$$\mathfrak{p}_{2n},\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2;\quad \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3;\quad \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_4;\quad \ldots;\quad \mathfrak{p}_{2n-1},\ \mathfrak{p}_{2n},\ \mathfrak{p}_1$$

die beiden Elementereihen

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{2n-1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_4,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{2n}$$

diesen Bedingungen. Das Indexsystem ist daher sowohl durch die Gruppe

$$'J(\mathfrak{p}_1),\ 'J(\mathfrak{p}_3),\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{p}_{2n-1})$$

als durch die andere

$$'J(\mathfrak{p}_2),\ 'J(\mathfrak{p}_4),\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{p}_{2n})$$

vollkommen und unzweideutig definiert.

---

§ 13. Die eindeutige Abhängigkeit eines willkürlichen Indexsystemes von der Gruppe seiner Fundamentaltripel.

Es seien zwei inäquivalente allgemeine Indexsysteme

I) $J(\mathfrak{p}_1'),\ J(\mathfrak{p}_2'),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_n')$ und $\bar{\text{I}})$ $\bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ \bar{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ \bar{J}(\mathfrak{p}_n)$

durch die in erweitertem Sinne geometrisch-deutigen Schemata repräsentiert:

$$\begin{array}{ll}
\text{I}') \ 'J(\mathfrak{p}_1') = \mathfrak{p}_2',\ \mathfrak{p}_3',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n', & \bar{\text{I}}') \ '\bar{J}(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n, \\
'J(\mathfrak{p}_2') = \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_{\alpha_3}',\ \mathfrak{p}_{\alpha_4}',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{\alpha_n}', & '\bar{J}(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{\alpha_3},\ \mathfrak{p}_{\alpha_4},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{\alpha_n}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots, \\
'J(\mathfrak{p}_n') = \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_{r_3}',\ \mathfrak{p}_{r_4}',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{r_n}', & '\bar{J}(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_{\varrho_3},\ \mathfrak{p}_{\varrho_4},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{\varrho_n},
\end{array}$$

$$\mathfrak{c}\,(\mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_i',\ \mathfrak{p}_{i+h}') = +1 = \mathfrak{c}\,(\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_{i+h}).$$

Es soll gezeigt werden, dass diese Darstellungen auch

stets inäquivalente Gruppen von Fundamentaltripeln definieren.

Die Beweisführung stützt sich auf einige allgemeine Eigenschaften einer beliebigen das Schema I′ in das andere $\bar{\mathrm{I}}'$ transformierenden Folge endlicher und eindeutiger Inversionen

$$\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_\varrho'.$$

Jede solche Reihe setzt sich nämlich aus zwei Kategorien von Elementwechseln zusammen:

Einerseits aus wesentlichen, d. h. denjenigen, welche einen zwischen entsprechenden Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \ldots, \mathfrak{p}_k', \ldots \quad \text{und} \quad '\bar{J}(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k, \ldots, \mathfrak{p}_l, \ldots$$

von vorneherein bestehenden Unterschied der Elementanordnungen ausgleichen,

andererseits aus unwesentlichen, d. h. denjenigen, welche im Gefolge eines derartigen Ausgleiches auftreten.

Da ferner irgend eine Inversion der Reihe

$$\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_\varrho'$$

in genau drei von $'J(\mathfrak{p}_1')$ verschiedenen Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i'), \ 'J(\mathfrak{p}_k'), \ 'J(\mathfrak{p}_l')$$

resp. die Elementepaare permutiert

$$\mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'; \ \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_i'; \ \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k',$$

mithin die Existenz der Transformationsreihe rücksichtlich je zweier korrespondierenden Quadrupel

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y', \mathfrak{p}_z' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z$$

der ursprünglichen Systeme

$$\mathrm{I}' \quad \text{und} \quad \bar{\mathrm{I}}'$$

den Verein der Relationen

$$'J(\mathfrak{p}_x') = '\bar{J}(\mathfrak{p}_x), \ 'J(\mathfrak{p}_y') = '\bar{J}(\mathfrak{p}_y), \ 'J(\mathfrak{p}_z') = '\bar{J}(\mathfrak{p}_z)$$

oder der anderen

$$'J(\mathfrak{p}_x') = J'(\mathfrak{p}_x), \ 'J(\mathfrak{p}_y') = J'(\mathfrak{p}_y), \ 'J(\mathfrak{p}_z') = J'(\mathfrak{p}_z)$$

zur unumgänglichen Vorbedingung hat, bieten sich im Hinblick auf die verglichenen Schemata

$$'J(\mathfrak{p}_1'), \ldots, 'J(\mathfrak{p}_n') \quad \text{und} \quad '\bar{J}(\mathfrak{p}_1), \ldots, '\bar{J}\mathfrak{p}_n)$$

als unmittelbare Folgerungen die Sätze:

1) Die Gesamtzahl der in den $n-1$ Paaren zugeordneter Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \ldots, \mathfrak{p}_k', \ldots \quad \text{und} \quad '\bar{J}(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k, \ldots, \mathfrak{p}_l, \ldots$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n)$$

vorhandenen Inversionen

$$1, l, k \quad \text{und} \quad 1, k, l$$

stellt allemal ein Multiplum von 3 dar;

2) in einer beliebigen das eine in das andere System transformierenden Folge von Inversionen

$$\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_\varrho'$$

tritt eine wesentliche stets in ungerader, eine unwesentliche stets in gerader Zahl von Wiederholungen auf.

Man bemerkt zugleich mit Bezug auf ein in obiger Reihe mehr mals auftretendes Tripel

$$\mathfrak{T}_h' \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l',$$

dafs wegen der dauernden Invarianz der Tripel

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k'; \ \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'; \ \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_i'$$

in dem Partialsysteme

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'$$

der Hauptpunkt des vierten Tripels

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'$$

für alle Inversionen derselbe ist.

Es mögen die ein Paar aufeinanderfolgender Inversionen

$$\mathfrak{T}_a' \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}_b'$$

eines solchen Fundamentaltripels

$$\mathfrak{p}_k' \mid \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l'$$

trennenden Elementwechsel sich auf durchweg verschiedene Tripel beziehen:

$$\mathfrak{T}_{a+1}', \mathfrak{T}_{a+2}', \ldots, \mathfrak{T}_{b-1}'.$$

Dann wird von letzteren

1) entweder kein einziges, 2) oder mindestens eines

zwei Elemente mit $\mathfrak{T}_a'$ gemein haben.

In dem ersten Falle bleibt das Fundamentaltripel

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'$$

von den Inversionen der anderen

$$\mathfrak{T}_{a+1}', \mathfrak{T}_{a+2}', \ldots, \mathfrak{T}_{b-1}'$$

vollkommen unberührt, sodafs seine einander entgegengesetzten Inversionen

$$\mathfrak{T}_a' \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}_b'$$

in unmittelbarer Folge ausgeführt und also überhaupt fortgelassen werden können.

Im zweiten Falle sei das erste mit

$$*) \quad \mathfrak{T}_a' \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'$$

in zwei Elementen übereinstimmende Tripel gegeben durch:

$$1) \ \mathfrak{T}_{a_1}' \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x', \quad 2) \ \mathfrak{T}_{a_1}' \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x'.$$

Hier kann man zunächst die zwischen den Inversionen von

$$\mathfrak{T}_a' \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}_{a_1}'$$

erfolgenden Elementwechsel als beiden vorangehend annehmen und also von vorneherein die Voraussetzung machen

$$\mathfrak{T}_{a_1}' \equiv \mathfrak{T}_{a+1}'.$$

Vermöge der Inversionen besagter zwei Tripel verwandeln sich die genau vorher geltenden Indices

$$1) \ 'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \ldots;$$
$$2) \ 'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x', \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \ldots$$

in resp. die anderen:

$$1a) \ 'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_k', \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_i', \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_i', \ldots;$$
$$2a) \ 'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_k', \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_i', \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_i', \cdots.$$

Da die Inversionen der folgenden Tripel

$$\mathfrak{T}_{a+2}', \ \mathfrak{T}_{a+3}', \ \ldots, \ \mathfrak{T}_{b-1}'$$

einerseits wieder zu dem Fundamentaltripel führen

$$\mathfrak{T}_b' \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l',$$

andererseits sämtlich untereinander verschieden sind, müssen zwei von ihnen sich auf die Tripel beziehen:

$$1) \ \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x' \ \text{und} \ \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \quad 2) \ \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x' \ \text{und} \ \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x'.$$

In der That liefern unter den ersten der an sich gleichberechtigten Annahmen

---

*) Zufolge der Definition von $\mathfrak{p}_1'$ als eines Elementes des Aussenpolygones schliefst die Annahme des positiv-elliptischen Quadrupels $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'$ und die dadurch bedingte andere des Primärbereiches $\mathfrak{p}_k' \mid \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l'$ keinerlei Einschränkung in sich.

$1a_\alpha)\ 'J(\mathfrak{p}_l')=\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_x', \ldots, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_i', \ldots,$ $1a_\beta)\ 'J(\mathfrak{p}_l')=\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_i', \ldots, \mathfrak{p}_x', \ldots;$

$2a_\alpha)\ 'J(\mathfrak{p}_k')=\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_x', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_i', \ldots,$ $2a_\beta)\ 'J(\mathfrak{p}_k')=\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_i', \ldots, \mathfrak{p}_x', \ldots$

die successiven Inversionen von

1) $\mathfrak{T}_{a_2}' \equiv \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x'$ und $\mathfrak{T}_{a_2}' \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x'$,

2) $\mathfrak{T}_{a_2}' \equiv \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x'$ und $\mathfrak{T}_{a_2}' \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x'$

in Bezug auf die Untergruppe

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x'$$

resp. die Schemata:

$1a_\alpha)\ 'J(\mathfrak{p}_i')=\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x',\ 'J(\mathfrak{p}_k')=\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_i',\ 'J(\mathfrak{p}_l')=\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_x',$

$2a_\alpha)\ 'J(\mathfrak{p}_i')=\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x',\ 'J(\mathfrak{p}_l')=\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_i',\ 'J(\mathfrak{p}_k')=\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_x',$

wodurch die geforderte Inversion von

$$\mathfrak{T}_b' \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'$$

wieder ausführbar wird.

Es soll jedes in der betrachteten Inversionenfolge

$$\mathfrak{T}_a', \mathfrak{T}_{a+1}', \ldots, \mathfrak{T}_{b-1}', \mathfrak{T}_b'$$
$$(\mathfrak{T}_a' \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l' \equiv \mathfrak{T}_b')$$

auftretende dreigliedrige System

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x';\ \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x';\ \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x'$$

als ein intermediäres bezeichnet werden.

Um zunächst den einfachsten Fall zu behandeln, nehme man an, die Reihe enthalte die einzige intermediäre Gruppe:

1) $\mathfrak{T}_{a+1}' \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x';\ \mathfrak{T}_{a_2}' \equiv \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x';\ \mathfrak{T}_{b-1}' \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x'.$

Alsdann kann weder die Reihe

$$\mathfrak{T}_{a+2}', \mathfrak{T}_{a+3}', \ldots, \mathfrak{T}_{a_2-1}'$$

eines der Tripel aufweisen

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y',$$

noch die Reihe

$$\mathfrak{T}_{a_2+1}', \mathfrak{T}_{a_2+2}', \ldots, \mathfrak{T}_{b-2}'$$

eines der anderen

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_y'.$$

Denn gemäfs den nach Vollzug der Inversionen von

1) $\ldots, \mathfrak{T}_a', \mathfrak{T}_{a+1}',$ 2) $\ldots, \mathfrak{T}_{a_2-1}', \mathfrak{T}_{a_2}'$

geltenden Indicesgruppen

1) $'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_k', \ldots,\ 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_i', \ldots,$

2) $'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_k', \ldots,\ 'J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_i', \ldots$

müfste den besagten Inversionen immer eine der folgenden vorangehen

$$\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x'; \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x'; \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x',$$

was durch die Voraussetzung ausgeschlossen ist.

Weil sonach kein Tripel der Reihe

$$1)\ \mathfrak{T}_{a+2}', \ldots, \mathfrak{T}_{a_2-1}',\ 2)\ \mathfrak{T}_{a_2+1}', \ldots, \mathfrak{T}_{b-2}'$$

mehr als ein Element der anderen enthält

$$1)\ \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'; \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x';\ 2)\ \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x'; \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l',$$

kann man die Inversionen der Tripel

$$\mathfrak{T}_a' \text{ und } \mathfrak{T}_{a+1}'$$

nach denjenigen der ersten, die Inversionen der Tripel

$$\mathfrak{T}_{b-1}' \text{ und } \mathfrak{T}_b'$$

vor denjenigen der zweiten Folge ausführen. An die Stelle der ursprünglichen Anordnung

$$\mathfrak{T}_a', \mathfrak{T}_{a+1}', \mathfrak{T}_{a+2}', \ldots, \mathfrak{T}_{a_2-1}', \mathfrak{T}_{a_2}', \mathfrak{T}_{a_2+1}', \ldots, \mathfrak{T}_{b-1}', \mathfrak{T}_b'$$

tritt mithin unbeschadet des Effektes die neue:

$$\mathfrak{T}_{a+2}', \ldots, \mathfrak{T}_{a_2-1}', \mathfrak{T}_a', \mathfrak{T}_{a+1}', \mathfrak{T}_{a_2}', \mathfrak{T}_{b-1}', \mathfrak{T}_b', \mathfrak{T}_{a_2+1}', \ldots, \mathfrak{T}_{b-2}'.$$

Hierin kann aber die Folge

$$\mathfrak{T}_a', \mathfrak{T}_{a+1}', \mathfrak{T}_{a_2}', \mathfrak{T}_{b-1}', \mathfrak{T}_b'$$

ihrerseits durch die kürzere ersetzt werden:

$$\mathfrak{T}_{b-1}', \mathfrak{T}_{a_2}', \mathfrak{T}_{a+1}'.$$

Denn, wie die Ausführung zeigt, verwandeln sich die nach den Inversionen von

$$\mathfrak{T}_{a+2}', \ldots, \mathfrak{T}_{a_2-1}'$$

geltenden Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \ldots$$

infolge der einen wie der anderen Gruppe von Elementwechseln in dieselben Formen:

$$'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x', \ldots.$$

Falls also zwischen zwei aufeinanderfolgenden Inversionen desselben Fundamentaltripels

$$\mathfrak{T}_a', \mathfrak{T}_{a+1}', \ldots, \mathfrak{T}_{a_1}', \ldots, \mathfrak{T}_{a_2}', \ldots, \mathfrak{T}_{a_3}', \ldots, \mathfrak{T}_b'$$
$$(\mathfrak{T}_a' \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l' \equiv \mathfrak{T}_b')$$

nur eine Intermediärgruppe vorhanden ist

$$\mathfrak{T}'_{a_1} \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x'; \quad \mathfrak{T}'_{a_2} \equiv \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x'; \quad \mathfrak{T}'_{a_3} \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x',$$

kann man unter Vernachlässigung der zweimaligen Inversion dieses Tripels die vorstehende durch die andere Inversionenfolge ersetzen:

$$\mathfrak{T}'_{a+1}, \mathfrak{T}'_{a+2}, \ldots, \mathfrak{T}'_{a_1-1}, \mathfrak{T}'_{a_1+1}, \ldots$$
$$\ldots, \mathfrak{T}'_{a_2-1}, \mathfrak{T}'_{a_3}, \mathfrak{T}'_{a_2}, \mathfrak{T}'_{a_1}, \mathfrak{T}'_{a_2+1}, \ldots$$
$$\ldots, \mathfrak{T}'_{a_3-1}, \mathfrak{T}'_{a_3+1}, \ldots, \mathfrak{T}'_{b-1}.$$

Die Regel erfährt in dem Falle eine Ausnahme, wo alle Tripel der Reihe

$$\mathfrak{T}'_a, \mathfrak{T}'_{a+1}, \ldots, \mathfrak{T}'_{b-1}, \mathfrak{T}'_b$$

ein und dasselbe Element $\mathfrak{p}_i'$ enthalten. — Hier würden die unmittelbar vor dem Elementwechsel von $\mathfrak{T}_a'$ geltenden Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l', \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_l', \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \ldots$$

durch diesen und denjenigen von

$$\mathfrak{T}'_{a_1} \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_x'$$

die Formen annehmen

$$'J(\mathfrak{p}_i') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_k', \ldots, \quad 'J(\mathfrak{p}_k') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l', \mathfrak{p}_x', \mathfrak{p}_i', \ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_l') = \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_i', \ldots,$$

und es müfste unter den darauf folgenden Inversionen der Tripel

$$\mathfrak{T}'_{a_1+1}, \mathfrak{T}'_{a_1+2}, \ldots, \mathfrak{T}'_{b-1}$$

behufs der Reproduktion des Fundamentaltripels

$$\mathfrak{T}_b' \equiv \mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_k', \mathfrak{p}_l'$$

in einer von ihnen sich diejenige von $\mathfrak{T}'_{a_1}$ wiederholen. Da aber die Voraussetzung ein solches Vorkommnis ausschliefst, so haben je zwei Tripel der Reihe

$$\mathfrak{T}'_{a+1}, \mathfrak{T}'_{a+2}, \ldots, \mathfrak{T}'_{b-1}$$

sowohl mit einander als mit $\mathfrak{T}_a'$ das einzige Element $\mathfrak{p}_i'$ gemein.

Dieses Sonderergebnis gestattet unmittelbar eine bemerkenswerte Nutzanwendung. Gegeben seien zwei Indexsysteme

$$\text{I.} \quad 'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{a_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_\alpha}, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{a_\alpha+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_{m-1}},$$
$$'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_{b_1}, \mathfrak{p}_{b_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{b_\beta}, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{b_\beta+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{b_{m-1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_{c_1}, \mathfrak{p}_{c_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{c_\gamma}, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{c_\gamma+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{c_{m-1}},$$
$$'J(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_x, \ldots, \mathfrak{p}_y, \ldots;$$

$$\text{I.}\quad \begin{aligned}
&'\bar{J}(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{a_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_{\alpha'}}, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{a_{\alpha'}+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{a_{m-1}},\\
&'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_{b_1}, \mathfrak{p}_{b_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{b_{\beta'}}, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{b_{\beta'}+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{b_{m-1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&'\bar{J}(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_{c_1}, \mathfrak{p}_{c_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{c_{\gamma'}}, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{c_{\gamma'}+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{c_{m-1}},\\
&'\bar{J}(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_y, \ldots, \mathfrak{p}_x, \ldots,
\end{aligned}$$

welche, in mindestens drei Paaren entsprechender Indices differierend, vermöge der Ausscheidung des Elementes $\mathfrak{p}_{m+1}$ identisch in einander übergehen.

Die Ausführungen des § 12 von pag. 224 bis pag. 227 in Verbindung mit dem Hülfstheoreme (13) bieten eine allgemeine stets anwendbare Methode, um in Bezug auf das System (I) eine Folge von das Element $\mathfrak{p}_{m+1}$ enthaltenden Tripeln anzugeben

$$(1)\ \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_\mu,$$

welche ohne Störung etwaiger Analogieen

$$'J(\mathfrak{p}_x) = 'J(\mathfrak{p}_x)$$

dessen übrige Indices $'J(\mathfrak{p}_h)$ successive in deren Korrespondenten $'J(\mathfrak{p}_h)$ überführt. Treten nun in besagter Reihe ein oder mehrere Tripel wiederholt auf, so stellt entweder schon die Verbindung zweier identischen Tripel

$$\mathfrak{T}_a, \mathfrak{T}_{a+1}, \ldots, \mathfrak{T}_{b-1}, \mathfrak{T}_b$$

oder eine in ihr enthaltene analoge

$$\mathfrak{T}_{a_1}, \mathfrak{T}_{a_1+1}, \ldots, \mathfrak{T}_{b_1-1}, \mathfrak{T}_{b_1}$$

eine Folge durchgängig verschiedener Tripel dar, die unter einander und mit dem Grenztripel das einzige Element $\mathfrak{p}_{m+1}$ gemein haben. Es können daher die Inversionen von

$$\mathfrak{T}_a \text{ und } \mathfrak{T}_b \text{ bezw. } \mathfrak{T}_{a_1} \text{ und } \mathfrak{T}_{b_1}$$

unmittelbar nacheinander vollzogen, mithin die Tripel selbst aus der Reihe (1) überhaupt ausgeschaltet werden. Weil aber die restierende Inversionenfolge auf ganz analoge Weise zu behandeln ist, läfst sich die paarweise Elimination sich wiederholender Elementwechsel solange fortsetzen, bis eine Folge von durchweg verschiedenen Tripeln resultiert:

$$(1_0)\quad \mathfrak{T}_{m_1}, \mathfrak{T}_{m_2}, \ldots, \mathfrak{T}_{m_\nu}.$$

Diese Tripel müssen in der ursprünglichen Reihe (1) offenbar in je einer ungeraden Anzahl auftreten. Sie stimmen deshalb genau mit denjenigen überein, auf welche sich bei der Elementartransformation des

Systemes I in $\bar{\text{I}}$ die wesentlichen Inversionen beziehen, und es folgt der Satz:

Stimmt ein Indexsystem

$$\text{I. } {}'J(\mathfrak{p}_1),\ {}'J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ {}'J(\mathfrak{p}_{m+1})$$

mit einem anderen

$$\bar{\text{I}}.\ {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_{m+1})$$

überein rücksichtlich der Elementengruppe

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_m,$$

so kann man die aus dem Vergleiche der Indices

${}'J(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_x, \ldots, \mathfrak{p}_y, \ldots$ und ${}'\bar{J}(\mathfrak{p}_{m+1}) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_y, \ldots, \mathfrak{p}_x, \ldots$

sich ergebenden Tripel

$$\mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_y$$

stets zu einer solchen Folge ordnen

$$\mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{x_1},\ \mathfrak{p}_{y_1};\ \mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{x_2},\ \mathfrak{p}_{y_2};\ \ldots;\ \mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{x_\nu},\ \mathfrak{p}_{y_\nu},$$

dafs ihre alleinigen successiven Inversionen das erste mit dem zweiten Systeme identifizieren.

Man betrachte die zu dieser Inversionenreihe gehörige von I zu $\bar{\text{I}}$ führende Kette paarweise inäquivalenter Indexsysteme:

$$\text{I},\ \text{I}_1,\ \text{I}_2,\ \ldots,\ \text{I}_{\nu-1},\ \text{I}_\nu = \bar{\text{I}}.$$

Dann folgt aus der durchgängigen Verschiedenheit der inversierten Tripel, dafs einem beliebigen derselben

$$\mathfrak{T}_h \equiv \mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{x_h},\ \mathfrak{p}_{y_h}$$

zunächst in den beiden Systemen

$$\text{I}_{h-1} \quad \text{und} \quad \text{I}_h,$$

in weiterer Konsequenz aber in allen Systemen der beiden Gruppen

$$\text{I},\ \text{I}_1,\ \text{I}_2,\ \ldots,\ \text{I}_{h-1} \quad \text{und} \quad \text{I}_h,\ \text{I}_{h+1},\ \ldots,\ \bar{\text{I}}$$

entgegengesetzte Charakteristiken zukommen. Da dies im besonderen auch von den Fundamentaltripeln

$$\mathfrak{T}_1 \equiv \mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{x_1},\ \mathfrak{p}_{y_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}_\nu \equiv \mathfrak{p}_{m+1},\ \mathfrak{p}_{x_\nu},\ \mathfrak{p}_{y_\nu}$$

der beiden Ausgangssysteme gilt

$$\text{I} \quad \text{und} \quad \bar{\text{I}},$$

schliefst man den Satz:

In jedem der beiden Indexsysteme

$$\text{I} \quad \text{und} \quad \bar{\text{I}}$$

giebt es resp. ein Fundamentaltripel

$$\mathfrak{T}_1 \text{ und } \mathfrak{T}_\nu,$$

welches in dem anderen Systeme entweder ebenfalls ein primäres oder ein allgemeines Tripel der entgegengesetzten Charakteristik darstellt;

oder kürzer:

Zwei inäquivalente Indexsysteme des angegebenen Charakters besitzen stets inäquivalente Gruppen von Fundamentaltripeln.

Das hier für zwei Indexsysteme besonderer Inäquivalenz entwickelte Beweisverfahren bietet bereits diejenigen leitenden Gedanken, welche auch gegenüber zwei allgemeinen Systemen zu dem entsprechenden Ergebnis führen.

Gegeben seien die beliebigen Schemata

$$\text{I. } 'J(\mathfrak{p}_1), 'J(\mathfrak{p}_2), \ldots, 'J(\mathfrak{p}_n), \quad \bar{\text{I}}. \; 'J(\mathfrak{p}_1), '\bar{J}(\mathfrak{p}_2), \ldots, '\bar{J}(\mathfrak{p}_n),$$

$$\mathfrak{c}\,(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) = \bar{\mathfrak{c}}\,(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k)$$

und aus den das erste in das zweite überführenden successiven Inversionen der Tripel

$$\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_\mu$$

die durch ein Paar aufeinander folgender Elementwechsel eines und desselben

$$\mathfrak{T}_a \equiv \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \equiv \mathfrak{T}_b$$

bestimmte Verbindungskette

$$\mathfrak{T}_a, \mathfrak{T}_{a+1}, \ldots, \mathfrak{T}_{b-1}, \mathfrak{T}_b.$$

Die Diskussion und die zu leistende Reduktion dieser Reihe auf eine ihr äquivalente von den identischen Tripeln $\mathfrak{T}_a$ und $\mathfrak{T}_b$ freie Folge stützt sich im wesentlichen auf eine Umformung des oben gewonnenen Grundgesetzes der Äquivalenz einer Inversionenfolge

$$1.)\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$$

mit der anderen

$$2.)\ \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}.$$

Danach bedingt die zweite Kette die Existenz des Fundamentaltripels

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},$$

und man wird daher aus den vorstehenden die gleichfalls äquivalenten Folgen ableiten

$$1.)\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \equiv$$
$$\equiv \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$$

und 2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

Da die Reduktion der betrachteten Inversionenfolge mit der wachsenden Anzahl ihrer Intermediärgruppen

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_i; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_i; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_i$$

sich mehr und mehr kompliziert, soll das bezügliche Verfahren vorerst für die speziellen Fälle $m = 2, 3$ entwickelt und dadurch die für seine Verallgemeinerung entscheidenden Gesichtspunkte gewonnen werden.

Reduktion einer Reihe mit 2 Intermediärgruppen.

Es mag die vorliegende Tripelfolge

(1.) $\mathfrak{T}_a = \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_{a+1}, \ldots, \mathfrak{T}_{b-1}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} = \mathfrak{T}_b$

die beiden Gruppen aufweisen:

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2.$

Bei der prinzipiellen Gleichberechtigung verschiedener Folgen der Tripel

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$$

in Hinsicht auf die Reihe (1) ergeben sich deren typische Formen aus der Kombination einer beliebigen, etwa der vorstehenden Anordnung ersterer mit denjenigen der Tripel

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2,$$

welche auf jene bezogen als charakteristisch verschieden erscheinen. Erwägt man aber, dafs die beiden Reihen

$$\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_\mu \text{ und } \mathfrak{T}_\mu, \mathfrak{T}_{\mu-1}, \ldots, \mathfrak{T}_1$$

gegenüber den respectiven Indexsystemen

$$\mathrm{I} \text{ und } \bar{\mathrm{I}}$$

ganz analoge Bedeutung haben, wird man aus einem Vergleiche der Folge

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$$

mit den sechs anderen

1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;$

2a) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;$ 2b) $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;$

3) $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2;$

4a) $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;$ 4b) $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2$

die Paare

2a) 2b) und 4a) 4b)

als im wesentlichen gleichartig erkennen. In den hiernach restierenden vier Bildungen der Reihe

$$\mathfrak{T}_a,\ \mathfrak{T}_{a+1},\ \ldots,\ \mathfrak{T}_{b-1},\ \mathfrak{T}_b$$

kann man unbeschadet der Allgemeinheit endlich noch die Annahme machen, dafs das Tripel $\mathfrak{T}_{a+1}$ mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1$, das andere $\mathfrak{T}_{b-1}$ aber mit einem der fünf übrigen ausgezeichneten Tripel identisch ist.

I. Hauptfall.

Wie auch in der vorliegenden Reihe

(1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$

die beiden Anordnungen

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$

einander durchsetzen mögen, stets findet eines der folgenden vier Vorkommnisse statt:

Es stehen die Tripel

1.) $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ vor $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ vor $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$,

2.) $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ vor $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$ vor $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$,

3.) $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$ vor $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ vor $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$,

4.) $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$ vor $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$ vor $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$.

In dem ersten Falle bietet sich als allgemeinste Form der Reihe (1) die Auffassung:

(1.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1''', \mathfrak{T}_2''', \ldots$
$\ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1^{(4)}, \mathfrak{T}_2^{(4)}, \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1^{(5)}, \mathfrak{T}_2^{(5)}, \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

Früheren ganz analoge Überlegungen lassen erkennen, dafs die Folgen

$\alpha.)$ $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots;$ $\beta.)$ $\mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots;$ $\gamma.)$ $\mathfrak{T}_1''', \mathfrak{T}_2''', \ldots;$ $\delta.)$ $\mathfrak{T}_1^{(1)}, \mathfrak{T}_2^{(1)}, \ldots;$
$\varepsilon.)$ $\mathfrak{T}_1^{(5)}, \mathfrak{T}_2^{(5)} \ldots$

resp. die Tripel der Formen ausschliefsen:

$\alpha.)$ $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x}; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x};$ $\beta.)$ $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x}; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x}; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x};$

$\gamma.)$ $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x}; \mathfrak{a}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x};$ $\delta.)$ $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x}; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x};$

$\varepsilon.)$ $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}.$

Man kann daher die Reihe successive in die anderen transformieren:

(1a.) $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1''', \mathfrak{T}_2''', \ldots$
$\ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1^{(4)}, \mathfrak{T}_2^{(4)}, \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1^{(5)}, \mathfrak{T}_2^{(5)}, \ldots;$

(1b.) $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1''', \mathfrak{T}_2''', \ldots$
$\ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1^{(4)}, \mathfrak{T}_2^{(4)}, \ldots, \mathfrak{T}_1^{(5)}, \mathfrak{T}_2^{(5)}, \ldots;$

(1c.) $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1''', \mathfrak{T}_2''', \ldots$
$\ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1^{(4)}, \mathfrak{T}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{T}_1^{(5)}, \mathfrak{T}_2^{(5)}, \ldots.$

Indem man auf die letzte Folge die obige Grundäquivalenz anwendet, reduziert man sie auf die gesuchte Form:

(1d.) $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots, \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1^{(3)}, \mathfrak{T}_2^{(3)}, \ldots$
$\ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1^{(1)}, \mathfrak{T}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{T}_1^{(5)}, \mathfrak{T}_2^{(5)}, \ldots;$

aus welcher die beiden Tripel $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ auf Grund der Voraussetzung ohne weiteres ausgeschieden werden können.

Dem zweiten Falle entsprechend wähle man die Reihe (1) in der Darstellung:

(1_2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1''', \mathfrak{T}_2''', \ldots$
$\ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1^{(1)}, \mathfrak{T}_2^{(1)}, \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1^{(5)}, \mathfrak{T}_2^{(5)}; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

Wie in dem ersten Falle ist diese zunächst in die äquivalente transformierbar

(1a) $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1''', \mathfrak{T}_2''', \ldots$
$\ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1^{(4)}, \mathfrak{T}_2^{(1)}, \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1^{(5)}, \mathfrak{T}_2^{(5)}, \ldots.$

Die weitere Transformation dieser Anordnung beruht auf folgender allgemeinen Regel:

Erfolgen bei der Elementartransformation eines Indexsystemes in ein anderes zwischen zwei Elementwechseln des nämlichen Tripels

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$$

die Inversionen einer Folge des Typus

1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{y}; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{y}; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}$

oder

2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{y}; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{y},$

so enthält die Reihe

1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{y}; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{y}$ oder 2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{y}; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}$

notwendig auch das Tripel

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}.$$

Denn da nach der Inversion von

1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{y}$ oder 2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{y}$

mit Bezug auf die Elementengruppe

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$$

der Index besteht

$$1)\ J(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{b} \quad \text{oder} \quad 2)\ J(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}, \mathfrak{y}, \mathfrak{x}, \mathfrak{b}$$

muſs dem Elementwechsel von

$$1)\ \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{y} \quad \text{oder} \quad 2)\ \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}$$

derjenige des anderen Tripels vorangehen

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}.$$

Nach dieser Regel bestimmen in der angesetzten Reihe (1) die Folgen

$$\alpha)\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1;$$

$$\beta)\ \mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1$$

resp. die Zwischentripel

$$\alpha)\ \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;\ \beta)\ \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$$

und zwar gemäfs dem nach der Inversion von

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$$

geltenden Index

$$J(\mathfrak{d}_1) = \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}$$

in der Reihenfolge

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2.$$

Zugleich erkennt man, dafs diese die beiden einzigen Tripel der Formen sind

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x};\ \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x};\ \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x};\ \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x},$$

welche in den bezeichneten Intervallen vorkommen, indem jede andere Annahme zu einem Widerspruch mit der Voraussetzung führt.

Die Reihe (1) nimmt daher die Gestalt an:

(1b) $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \ldots$
$\ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1^{(4)}, \mathfrak{T}_2^{(4)}, \ldots, \mathfrak{T}_1^{(5)}, \mathfrak{T}_2^{(5)}; \ldots$.

Dieselbe läfst sich aber nach bekannten Vorschriften successive in die anderen transformieren:

(1c) $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \ldots$
$\ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1^{(4)}, \ldots;$

(1d) $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \ldots$
$\ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1^{(4)}; \ldots;$

(1e) $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \ldots;$
$\ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1^{(4)}, \ldots,$

aus deren letzter die gesuchte Form resultiert:

$$\mathfrak{T}_1', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \ldots$$
$$\ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \ldots.$$

Unter der dritten möglichen Annahme kann man die Reihe (1) von vorneherein in der Form ansetzen:

(1.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots$
$\ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1''', \mathfrak{T}_2''', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

Gemäfs den beiden Anordnungen

a) $\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2$

ist dieselbe durch die Tripel $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ in der Darstellung zu ergänzen:

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots$
$\ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1''', \mathfrak{T}_2''', \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

Aus der ursprünglichen Voraussetzung ist mittelbar zu erkennen, dafs die Reihen

$(\alpha.)\ \mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots; \quad (\beta.)\ \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots; \quad (\gamma.)\ \mathfrak{T}_1''', \mathfrak{T}_2''', \ldots$

weder Tripel der Bildungen

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}$$

noch solche der resp. anderen enthalten

$\alpha.)\ \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x}; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x};\ \beta.)\ \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x};\ \gamma.)\ \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x}; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x},$

sowie dafs deshalb und wegen des nach der Inversion von

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$$

geltenden Index

$$J(\mathfrak{d}_1) = \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{b}, \ldots$$

in der die Tripel

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$$

trennenden Folge auch keines der Form auftritt

$$\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}.$$

Demgemäfs ergiebt sich die Reihe (1) als äquivalent der anderen:

$(1_a.)\ \mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots$
$\ldots, \mathfrak{T}_k''; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1''', \mathfrak{T}_2''', \ldots.$

Es mögen unter den Tripeln

$$\mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots, \mathfrak{T}_k''$$

auch solche der Zusammensetzungen vorkommen

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x} \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{y};$$

dann kann allemal angenommen werden, dafs sich dieselben in der Anordnung folgen:

$\mathfrak{T}_1'', \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{y}_1; \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{y}_2; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_1; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_2; \ldots; \mathfrak{T}_k''.$ —

Dies nachzuweisen, betrachte man eine etwaige Reihe

$$\mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{T}_a'',\ \mathfrak{T}_{a+1}'',\ \ldots;\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{y}$$

und bestimme innerhalb derselben ausgehend von den Grenztripeln diejenigen zwei Folgen

$$\mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{T}_\varepsilon \quad \text{und} \quad \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{y};\ \overline{\mathfrak{T}}_1,\ \overline{\mathfrak{T}}_2,\ \ldots,\ \overline{\mathfrak{T}}_\delta,$$

in welchen jedes Tripel mit mindestens einem seiner Vorgänger doppelt verknüpft ist, d. h. mit ihm in zwei Elementen übereinstimmt.

Hierbei sind zwei Eventualitäten zu unterscheiden:

1) entweder haben beide Reihen auch nicht ein einziges Tripel gemein, sie schliefsen sich also gegenseitig aus,

2) oder sie coincidieren in einem und folglich in allen Tripeln.

Gilt die erste Beziehung, so wird man die Folge

$$\mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{T}_a'',\ \mathfrak{T}_{a+1}'',\ \ldots;\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{y}$$

in der äquivalenten gesuchten Anordnung schreiben:

$$\overline{\mathfrak{T}}_\delta,\ \overline{\mathfrak{T}}_{\delta-1}.\ \ldots,\ \overline{\mathfrak{T}}_1;\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{y};\ \ldots;\ \mathfrak{T}_h'',\ \ldots;\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{T}_\varepsilon.$$

Sind dagegen die Reihen identisch, so bestimme man innerhalb der Verkettung

$$\mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{T}_\varepsilon;\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{y}$$

successive diejenigen ersten Tripel

$$\mathfrak{T}_{a_1},\ \mathfrak{T}_{a_2},\ \mathfrak{T}_{a_3},\ \ldots,\ \mathfrak{T}_{a_\lambda};\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x},$$

welche mit resp. den anderen

$$\mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{y};\ \mathfrak{T}_{a_1},\ \mathfrak{T}_{a_2},\ \ldots,\ \mathfrak{T}_{a_\lambda}$$

je zwei gemeinschaftliche Elemente aufweisen. Es existiert daher in der betrachteten eine Folge des speziellen Charakters

$$\mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{T}_{a_\lambda},\ \mathfrak{T}_{a_{\lambda-1}},\ \ldots,\ \mathfrak{T}_{a_1};\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{y},$$

dafs jedes Glied mit seinen beiden Nachbarn doppelt verknüpft ist.

Nun können aber drei Tripel der Formen

$$\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{x}_3;\ \mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{x}_4;\ \mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{x}_4,\ \mathfrak{x}_5$$

nicht unmittelbar nach einander zur Inversion gelangen. Denn da die Elementwechsel des ersten Paares den Index involvieren

$$J(\mathfrak{x}_3) = \mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{x}_4,\ \mathfrak{x}_2,$$

müfste vor dem des dritten derjenige eines der Tripel stattfinden

$$\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{x}_5 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{x}_3,\ \mathfrak{x}_5.$$

Es zeigt mithin die Folge

$$\mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{T}_{a_\lambda},\ \mathfrak{T}_{a_{\lambda-1}},\ \ldots,\ \mathfrak{T}_{a_1};\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{y}$$

notwendig eine der drei Darstellungen:

(1) $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_3; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_{\lambda+2} \equiv \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{y};$

(2) $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_1; \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_3; \ldots; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_{\lambda+2} \equiv \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{y};$

(3) $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_3; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_{\lambda+2} \equiv \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{y}.$

Die dritte Annahme ist an und für sich, die ersten beiden aber deshalb illusorisch, weil in der Reihe

$$\mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots, \mathfrak{T}_k''$$

kein Tripel der Typen auftritt

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1 \text{ und } \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2.$$

Hiernach ist die Richtigkeit der obigen Behauptung allgemein erwiesen, und man kann folglich die Reihe (1_a) durch einfache Transpositionen ihrer Glieder auf die Form bringen:

(1_b) $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{y}_1; \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{y}_2; \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{y}_\delta; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c};$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_1; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_2; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_\varepsilon; \ldots; \mathfrak{T}_1''', \mathfrak{T}_2''', \ldots.$

Die mittlere Reihe geht vermöge der äquivalenten Anordnungen

$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$ und $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$

in die andere über

(1_c) $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2,$

und diese auf Grund analoger Beziehungen in

(1_d) $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2.$ Q. e. d.

Betreffs des vierten Falles hat man die Reihe

(1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$

entsprechend den Folgen

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$

zu ergänzen durch die Tripel

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2 \text{ und } \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2,$$

und kann sie dann ähnlich wie in dem vorigen Falle in die Anordnung transformieren:

(1_a) $\ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \ldots.$

Gemäfs den gleichwertigen Folgen

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1$

ist diese jedoch äquivalent der schon behandelten anderen

$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

II. Hauptfall.

Aus der Kombination der Anordnungen

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$

ergeben sich für die betrachtete Tripelfolge

$$(2.)\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_{\mu-1}, \mathfrak{T}_\mu; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$$

als typische Grundreihen:

(2a.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c};$

(2b.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c};$

(2c.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

Ein Vergleich der in diesen Reihen zu den Elementen

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$$

gehörigen Tripelfolgen läfst erstere nach einer bekannten Regel sich zu den Systemen ergänzen:

(a.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c};$

(b.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c};$

(c.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

Wie in den einzelnen Varianten des ersten Hauptfalles ermöglichen es auch hier einfache Umstellungen in höchstens einem Elemente übereinstimmender Nachbartripel der Reihe

$$(2.)\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$$

diese auf eine solche Form zu bringen, dafs die in ihr auftretenden Tripel

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$

sich zu der einen oder der anderen vorstehender drei Anordnungen zusammenschliefsen.

Letztere gehen aber zufolge der Äquivalenzen

(a.) $a, b, c; a, b, d_1; b, c, d_1, a, c, d_1 \equiv a, c, d_1; b, c, d_1; a, b, d_1; a, b, c;$
$a, b, d_2; a, c, d_2; b, c, d_2; a, b, c \equiv a, b, c; b, c, d_2; a, c, d_2; a, b, d_2;$

(b.) $a, d_1, d_2; a, c, d_2; c, d_1, d_2; a, c, d_1 \equiv a, c, d_1; c, d_1, d_2; a, c, d_2; a, d_1, d_2;$

(c.) $a, b, d_1; a, b, d_2; a, d_1, d_2; b, d_1, d_2 \equiv b, d_1, d_2; a, d_1, d_2; a, b, d_2; a, b, d_1$

in die andere über:

(a.) $a, c, d_1; b, c, d_1; a, b, d_1; c, d_1, d_2; b, c, d_2; a, c, d_2; a, b, d_2;$

(b.) $a, b, c; a, b, d_1; b, c, d_1; a, b, d_2; a, c, d_1;$
$c, d_1, d_2; a, c, d_2; a, d_1, d_2; b, c, d_2; a, b, c \equiv$
$\equiv a, b, c; a, b, d_1; b, c, d_1; a, c, d_1; c, d_1, d_2;$
$a, b, d_2; a, c, d_2; b, c, d_2; a, b, c; a, d_1, d_2;$

(c.) $a, b, c; b, d_1, d_2; a, d_1, d_2; a, b, d_2; a, b, d_1;$
$a, c, d_2; b, c, d_2; c, d_1, d_2; b, c, d_1; a, c, d_1; a, b, c \equiv$
$\equiv b, d_1, d_2; a, d_1, d_2; a, b, c; a, b, d_2; a, c, d_2; b, c, d_2;$
$c, d_1, d_2; a, b, d_1; b, c, d_1; a, c, d_1; a, b, c,$

und hiervon (b) und (c) vermöge analoger Beziehungen weiter in:

(b.) $a, c, d_1; b, c, d_1; a, b, d_1; c, d_1, d_2;$
$b, c, d_2; a, c, d_2; a, b, d_2; a, d_1, d_2;$

(c.) $b, d_1, d_2; a, d_1, d_2; b, c, d_2; a, c, d_2; a, b, d_2;$
$c, d_1, d_2; a, c, d_1, b, c, d_1; a, b, d_1.$

III. Hauptfall.

Entsprechend den durch die Folgen

$a, b, d_1; b, c, d_1; a, c, d_1$ und $a, c, d_2; b, c, d_2; a, b, d_2$

bestimmten drei typischen Anordnungen

(a.) $a, b, c; a, b, d_1; b, c, d_1; a, c, d_1; a, c, d_2; b, c, d_2; a, b, d_2; a, b, c;$

(b.) $a, b, c; a, b, d_1; b, c, d_1; a, c, d_2; a, c, d_1; b, c, d_2; a, b, d_2; a, b, c;$

(c.) $a, b, c; a, b, d_1; a, c, d_2; b, c, d_2; a, b, d_2; b, c, d_1; a, c, d_1; a, b, c$

leitet man mittelst bekannter Prozesse aus der gegebenen Tripelfolge

3) $a, b, c; \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots; a, b, d_1; \ldots; a, b, c$

unter den erforderlichen Ergänzungen die Grundreihen ab:

(a.) $a, b, c; a, b, d_1; b, c, d_1; a, c, d_1; c, d_1, d_2; a, d_1, d_2;$
$b, d_1, d_2; a, c, d_2; b, c, d_2; a, b, d_2; a, b, c;$

(b.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c};$

(c.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},$

wo die jeweilige Aufeinanderfolge der Ergänzungstripel

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$$

bestimmt ist durch die vor ihren Inversionen bestehenden respektiven Indices

$$J(\mathfrak{d}_1) \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{d}_2).$$

Die Reducibilität der ersten Reihe ist evident; diejenige der beiden anderen ergiebt sich aus deren erstmaliger Umformung in

(b.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c};$

(c.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$

und der nachherigen Ersetzung der Folgen

(b.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ und (c.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2$
durch die äquivalenten
$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1$.
Man erhält dadurch die bereits als reducibel erkannten Reihen:

(b.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c};$
(c.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

IV. Hauptfall.

Die endlich aus den Folgen

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$$

gemischten verschiedenen Grundreihen der vorliegenden Anordnung

$$(4.) \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},$$

auf welche man letztere durch passende Transpositionen ihrer Tripel zurückführen kann, zeigen vervollständigt die Darstellungen:

(a.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c};$

(b.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c};$

(c.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

Sowohl die erste als auch die zweite Reihe — die Umkehrung der Folge

$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$

macht beide ineinander übergehen — sind äquivalent der Anordnung:

$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2.$

Die dritte Reihe verwandelt sich nach Umstellung der Tripel

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$

und durch die Inversion der Folge

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$

zunächst in die andere

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},$

und dann vermöge einiger Transpositionen in die als reducibel bekannte dritte:

$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

Hiermit sind sämtliche Annahmen erschöpft, welche für die Reduktion einer Inversionenfolge

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_\mu; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$

mit zwei Intermediärgruppen

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}$

in betracht kommen können. In allen Fällen hat sich übereinstimmend die Möglichkeit der Transformation der Reihe in eine ihr äquivalente ergeben, in der die Inversionen des Tripels $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ als unmittelbar nacheinander erfolgend sich aufheben.

Reduktion einer Reihe (1) mit 3 Intermediärgruppen.

In Rücksicht auf die grofse Anzahl hierbei zu unterscheidender Fälle einerseits, wie auf die bisher beobachtete völlige Analogie der verwerteten Transformationsmethoden andererseits mag die Untersuchung an einem bestimmten ausreichend allgemeinen Beispiel geführt werden. Als solches diene die Reihe:

(1.) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \ldots$
$\ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \ldots$
$\ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

Nach einer bekannten Regel sind die Folgen

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2$

durch resp. die Tripel zu ergänzen

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3.$$

Analog vervollständigen sich:

$\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ durch $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3$,

$\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$ durch $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$,

$\mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2$ durch $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$,

$\mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2$ durch $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$,

$\mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_3$ durch $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3$.

Hiernach resultiert zunächst die Grundreihe:

(1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; (\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3); \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3);$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},$

wo jede noch unbestimmte Tripelfolge in Klammern eingeschlossen ist.

Betreffs der Stellung des Paares

$$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3$$

folgt aus der Form des nach der Inversion von

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$$

geltenden Index

$$J(\mathfrak{d}_1) = \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{c}, \mathfrak{a},$$

dafs das Tripel $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ dem anderen $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3$ vorangeht. Ferner lehrt ein Blick auf die Anordnungen

$\mathfrak{d}_2, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_3, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{d}_3, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{d}_3, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{d}_3, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1,$

dafs zwischen den Tripeln der Paare

$$\mathfrak{d}_2, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{d}_3, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{d}_3, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2$$

notwendig das dritte auftritt

$$\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3.$$

Also erhält die Grundreihe die Form:

(1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; (\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3); \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},$

und hierin bestimmt sich gemäfs dem nach der Inversion von $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$ resultierenden Index

$$J(\mathfrak{d}_2) = \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{a}$$

die noch fragliche Reihenfolge zweier Glieder durch

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3.$$

Zurückkehrend zur Reduktion der ursprünglichen vollständigen Inversionenfolge

(1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1^{(2)}, \mathfrak{T}_2^{(2)}, \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{T}_1^{(3)}, \mathfrak{T}_2^{(3)}, \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(4)}, \mathfrak{T}_2^{(4)}, \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(5)}, \mathfrak{T}_2^{(5)}, \ldots;$
$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(6)}, \mathfrak{T}_2^{(6)}, \ldots; \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(7)}, \mathfrak{T}_2^{(7)}, \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{T}_1^{(8)}, \mathfrak{T}_2^{(8)}, \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(9)}, \mathfrak{T}_2^{(9)}, \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(10)}, \mathfrak{T}_2^{(10)}, \ldots;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1^{(11)}, \mathfrak{T}_2^{(11)}, \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(12)}, \mathfrak{T}_2^{(12)}, \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{T}_1^{(13)}, \mathfrak{T}_2^{(13)}, \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1^{(14)}, \mathfrak{T}_2^{(14)}, \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1^{(15)}, \mathfrak{T}_2^{(15)}, \ldots;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(16)}, \mathfrak{T}_2^{(16)}, \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$

beweist man — die Reihe von ihren Grenztripeln aus verfolgend — unter Beobachtung der jeweiligen Indices

$$J(\mathfrak{a}), J(\mathfrak{b}), J(\mathfrak{c}), J(\mathfrak{d}_1), J(\mathfrak{d}_2), J(\mathfrak{d}_3)$$

schrittweise die Unabhängigkeit der Tripelfolgen

$$\mathfrak{T}_1^{(h)}, \mathfrak{T}_2^{(h)}, \ldots \text{ und } \mathfrak{T}_1^{(17-h)}, \mathfrak{T}_2^{(17-h)}, \ldots$$
$$(h = 1, 2, 3)$$

von den ihnen vorangehenden Tripeln der Grundreihe. Infolge dessen transformiert sich die vorliegende in die äquivalente Anordnung:

$(1)_1$ $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots, \mathfrak{T}_1''', \mathfrak{T}_2''', \ldots;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(4)}, \mathfrak{T}_2^{(4)}, \ldots;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(5)}, \mathfrak{T}_2^{(5)}, \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(6)}, \mathfrak{T}_2^{(6)}, \ldots;$
$\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(7)}, \mathfrak{T}_2^{(7)}, \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(8)}, \mathfrak{T}_2^{(8)}, \ldots;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(9)}, \mathfrak{T}_2^{(9)}, \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(10)}, \mathfrak{T}_2^{(10)}, \ldots;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1^{(11)}, \mathfrak{T}_2^{(11)}, \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(12)}, \mathfrak{T}_2^{(12)}, \ldots;$
$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{T}_1^{(13)}, \mathfrak{T}_2^{(13)}, \ldots;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c};$
$\mathfrak{T}_1^{(14)}, \mathfrak{T}_2^{(14)}, \ldots, \mathfrak{T}_1^{(15)}, \mathfrak{T}_2^{(15)}, \ldots, \mathfrak{T}_1^{(16)}, \mathfrak{T}_2^{(16)}, \ldots.$

Um Überblick und Darstellung zu erleichtern, mögen die Tripel der Grundreihe von deren Grenzgliedern $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ aus als erstes, zweites u. s. w. gezählt und dem entsprechend die genau nach und genau

vor den Inversionen der einzelnen bestehenden Indexsysteme durch die Bezeichnungen unterschieden werden

$$I_1,\ I_2,\ I_3,\ \ldots \quad \text{und} \quad \bar{I}_1,\ \bar{I}_2,\ \bar{I}_3,\ \ldots.$$

Die danach giltigen Schemata

$$I_5.\ J(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{b};\ J(\mathfrak{b}) = \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_3,\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{a};\ J(\mathfrak{c}) = \mathfrak{a},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{d}_3,\ \mathfrak{b};$$
$$J(\mathfrak{d}_1) = \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{a};\ J(\mathfrak{d}_2) = \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{a};$$

$$\bar{I}_5.\ J(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{d}_3,\ \mathfrak{c};\ J(\mathfrak{b}) = \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{c};\ J(\mathfrak{c}) = \mathfrak{a},\ \mathfrak{d}_3,\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{b};$$
$$J(\mathfrak{d}_1) = \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \ldots;\ J(\mathfrak{d}_2) = \mathfrak{a},\ \mathfrak{c},\ \ldots$$

lassen erkennen, dafs die beiden Reihen

$$\mathfrak{T}_1^{(4)},\ \mathfrak{T}_2^{(4)},\ \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}_1^{(13)},\ \mathfrak{T}_2^{(13)},\ \ldots$$

notwendig frei sind von resp. allen Tripeln

(α_5) $\mathfrak{a},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_3,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_3,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};$

$(\bar{\alpha}_5)$ $\mathfrak{a},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{d}_3,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_3,\ \mathfrak{x},$

die zweite aber möglicher Weise solche der Formen enthält

$$\mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x} \quad \text{und} \quad \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x}.$$

In diesem Falle ist jede etwaige Folge

$$\mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_2;\ \ldots;\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x}';\ \ldots;\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \ldots;\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2$$

wie früher in die andere umzuformen

$$\mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_2;\ \ldots;\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \ldots;\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x}';\ \ldots;\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,$$

und die Reihe $(1)_1$ durch die andere zu ersetzen:

(1_2) $\mathfrak{T}_1',\ \mathfrak{T}_2',\ \ldots,\ \mathfrak{T}_1'',\ \mathfrak{T}_2'',\ \ldots,\ \mathfrak{T}_1''',\ \mathfrak{T}_2''',\ \ldots,\ \mathfrak{T}_1^{(4)},\ \mathfrak{T}_2^{(4)},\ \ldots;$
$\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c};\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_1;\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_2;\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_2;\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_3;\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{T}_1^{(5)},\ \mathfrak{T}_2^{(5)},\ \ldots;\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{d}_3;\ \ldots;\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_3;\ \mathfrak{T}_1^{(12)},\ \mathfrak{T}_2^{(12)},\ \ldots;\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \ldots;$
$\mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_2;\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2;\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1;\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_3;\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_2;\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c};$
$\mathfrak{T}_1^{(13)},\ \mathfrak{T}_2^{(13)},\ \ldots;\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{x};\ \ldots;\ \mathfrak{T}_1^{(11)},\ \mathfrak{T}_2^{(11)},\ \ldots;\ \mathfrak{T}_1^{(16)},\ \mathfrak{T}_2^{(16)}\ \ldots.$

Ein Blick auf die von den vorausgehenden Bildungen unterschiedenen Indices

$$I_6.\ J(\mathfrak{b}) = \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_3,\ \mathfrak{a};\ J(\mathfrak{d}_1) = \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_3,\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{a};$$

$$\bar{I}_6.\ J(\mathfrak{c}) = \mathfrak{a},\ \mathfrak{d}_3,\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{b};\ J(\mathfrak{d}_1) = \mathfrak{b},\ \mathfrak{d}_2,\ \mathfrak{c};\ J(\mathfrak{d}_2) = \mathfrak{a},\ \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{c}$$

lehrt, dafs die Reihen

$$\mathfrak{T}_1^{(5)},\ \mathfrak{T}_2^{(5)},\ \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}_1^{(12)},\ \mathfrak{T}_2^{(12)},\ \ldots$$

neben den Tripeln der Gruppen

$$(\alpha_5) \quad \text{und} \quad (\bar{\alpha}_5)$$

resp. auch die anderen ausschliefsen

$$(\alpha_6)\ \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x} \quad \text{und} \quad (\bar{\alpha}_6)\ \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}.$$

Indem man daher eine in der zweiten Reihe etwa vorhandene Folge

$$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1\ \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(12)}, \ldots; \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}; \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$$

auf bekannte Weise in die andere transformiert

$$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{T}_1^{(12)}, \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}; \ldots; \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}'; \ldots; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2,$$

wird man die obige Reihe $(1)_2$ durch einfache Transpositionen auf die Form bringen:

$(1)_3$ $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots, \mathfrak{T}_1^{(5)}, \mathfrak{T}_2^{(5)}, \ldots;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c};\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1;\ \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;\ \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;\ \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3;\ \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3;\ \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{T}_1^{(6)}, \mathfrak{T}_2^{(6)}, \ldots; \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{T}_1^{(11)}, \mathfrak{T}_2^{(11)}, \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}; \ldots$
$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3;\ \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2;\ \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1;\ \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3;\ \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \ldots$
$\mathfrak{T}_1^{(12)}, \mathfrak{T}_2^{(12)}, \ldots; \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}'; \ldots; \mathfrak{T}_1^{(16)}, \mathfrak{T}_2^{(16)}, \ldots.$

Auf ganz analogem Wege, nämlich durch die Betrachtung der Schemata I_6 und I_7 folgt weiter, dafs kein Tripel der beiden Reihen

$$\mathfrak{T}_1^{(6)}, \mathfrak{T}_2^{(6)}, \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}_1^{(7)}, \mathfrak{T}_2^{(7)}, \ldots$$

mit einem ihm vorangehenden der Grundreihe in zwei Elementen übereinstimmt, dafs mithin die letzte Reihe (1_3) mit der anderen äquivalent ist:

$(1)_4$. $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots, \mathfrak{T}_1^{(6)}, \mathfrak{T}_2^{(6)}, \ldots, \mathfrak{T}_1^{(7)}, \mathfrak{T}_2^{(7)}, \ldots;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c};\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1;\ \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;\ \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2;\ \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3;\ \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3;\ \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3;\ \mathfrak{T}_1^{(8)}, \mathfrak{T}_2^{(8)}, \ldots;\ \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;\ \mathfrak{T}_1^{(9)}, \mathfrak{T}_2^{(9)}, \ldots,$

. . . . . .

Man erkennt aber aus dem Schema

I_8. $J(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{b};\ J(\mathfrak{b}) = \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_3;\ J(\mathfrak{c}) = \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{a};$
$J(\mathfrak{d}_1) = \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{a};\ J(\mathfrak{d}_2) = \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{a};\ J(\mathfrak{d}_3) = \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{a}, \mathfrak{b},$

dafs ein Tripel der Folge $\mathfrak{T}_1^{(8)}, \mathfrak{T}_2^{(8)}, \ldots$ weder mit einem der acht ersten Tripel der Grundreihe noch mit dem anderen $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$ mehr als ein Element gemein hat, dafs dagegen einzelne mit dem Tripel $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3$ in je zwei Elementen übereinstimmen können, und zwar solche der Bildung

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}.$$

Also gelangt man schliefslich zu der Succession:

$$(1)_5\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;$$
$$\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \ldots;$$
$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{y}; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1;$$
$$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$$

Mit bezug auf diese Reihe lehren die genau nach den Inversionen von

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$$

geltenden Indices

$$J(\mathfrak{d}_3) = \mathfrak{b}, \mathfrak{x}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{a}; \quad J(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}, \mathfrak{x}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3,$$

dafs in den beiden Reihen

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2$$

notwendig resp. die Tripel auftreten

$$\mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x},$$

andernfalls müfsten die Reihen entgegen den ursprünglichen Voraussetzungen die Tripel aufweisen

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}.$$

Ganz analog ergiebt sich rücksichtlich der Folgen

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{y}; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3,$$

dafs die zweite notwendig das Tripel $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{y}$ und also auch das andere $\mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{y}$ enthält.

Demgemäfs hat man die Reihe

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_i; \ldots; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_i; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_i; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$$

im allgemeinen als aus mehreren Folgen

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_i; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_i; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

und aus gewissen von diesen abhängigen Tripeln zusammengesetzt anzunehmen.

Es bestimmt aber die eine Reihenfolge

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_2; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_m$$

die entsprechenden anderen:

$$\mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_1; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_2; \ldots; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_m \quad \text{u.} \quad \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_{m-1}; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_1.$$

Denn zufolge der nach den Inversionen von

$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$$

geltenden Indices

$$J(\mathfrak{d}_3) = \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{b} \quad \text{und} \quad J(\mathfrak{b}) = \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$$

müssen den Inversionen der Tripel

$$\mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_1$$

resp. die der anderen vorausgehen

$$\mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_2.$$

Diese Beziehung läfst weiter erkennen, dafs irgend drei Folgen

$$1)\ \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_i; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_k; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \ldots,$$
$$2)\ \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_i; \ldots; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_k; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \ldots,$$
$$3)\ \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_k; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_i; \ldots$$

Tripel der resp. Formen ausschliefsen:

$$1)\ \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k; \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \quad 2)\ \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k; \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k,$$
$$3)\ \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k.$$

Denn unter den gegenteiligen Annahmen

$$1a)\ \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_i; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_k; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3,$$
$$1b)\ \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_i; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_k; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3,$$

— es genügt, diesen einen Fall zu verfolgen — müfsten, da Wiederholungen ausgeschlossen sind, die Folgen bestehen:

$$1a)\ \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_i; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_k,$$
$$1b)\ \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_i; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_k.$$

Die fragliche Verbindungsreihe

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1$$

nimmt deshalb die endgiltige Form an:

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_2; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_m;$$
$$\mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_1; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_2; \ldots; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;$$
$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_{m-1}; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1.$$

Dieselbe ist nach bekannten Regeln successive in die andere transformierbar:

$$1)\ \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_1; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_{m-1}; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_1; \ldots; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3\ \mathfrak{x}_{m-1};$$
$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_m;$$
$$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_{m-1}; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_{m-2}; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1 \equiv$$
$$2)\ \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_m; \ldots \equiv$$
$$3)\ \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_1; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_{m-1}; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_1; \ldots$$
$$\ldots; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_{m-1}; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_{m-1}; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_1;$$
$$\mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1.$$

Nach $(m-1)$-maliger Wiederholung dieser Schlufsweise resultiert schliefslich die Reihe:

4) $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_{m-1}; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_1;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_1; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_2; \ldots; \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_m;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_2; \ldots; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1.$

Nun sind die Glieder der Gruppe $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{x}_h$ von den vorangehenden, die der Gruppen $\mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_h$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{x}_h$ von den folgenden Tripeln der Grundreihe (1) unabhängig. Man kann deshalb die ursprüngliche Reihe (1) endgiltig auf die Anordnung zusammenziehen:

(1_0) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1;$
$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

Einfache Transpositionen führen dieselbe in die andere über:

(1_1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}; \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},$

und diese verwandelt sich zufolge der Äquivalenz

$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2 \equiv \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3$

und passender Umstellungen einiger Glieder in:

(1_2) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

Auf Grund der weiteren Beziehungen

$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2 \equiv \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2,$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1 \equiv \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3$

resultiert aus der vorstehenden die neue Form:

(1_3) $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2;$
$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},$

und da die Äquivalenz gilt

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1 \equiv \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},$

erhält man:

(1_4) $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;$
$\mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$

Der durch die Tripel $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ abgegrenzte Teil der Reihe läfst sich weiter schreiben

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;$$
$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},$$

und verwandelt sich dann gemäfs der Relation

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3 \equiv \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2$$

in die Folge:

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;$$
$$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \equiv$$
$$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3;$$
$$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_3; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}_2; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}_2,$$

eine Reihe, deren Reduzibilität auf der Hand liegt. Q. e. d.

Reduktion der Reihe (1) bei m Intermediärgruppen.

Es mag die betrachtete Reihe

$$(1)\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_\mu; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$$

beliebig viele Intermediärgruppen enthalten

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_i; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_i; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_i,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Man kann die Reihe auf ähnliche Weise wie in den früheren speziellen Fällen zunächst in die Darstellung überführen

$$\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_1; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1'', \mathfrak{T}_2'', \ldots,$$

wo die Grundreihe aufser den $3m$ genannten nur noch Tripel der Zusammensetzungen enthält:

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k; \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k; \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k; \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l.$$

Angenommen, es sei eine allgemeine Methode bekannt, um für eine nur $m - 1$ oder weniger Intermediärgruppen enthaltende Grundreihe

$$(1_0)\ \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_i; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$$

eine Folge von Grundäquivalenzen abzuleiten, welche zusammen mit geeigneten Transpositionen die Reihe auf die reduzible Form bringen:

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_i; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_i; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_i; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$$

Dieselben seien für die aus der ursprünglichen Reihe (1) nach Ausschlufs der Tripel des Elementes $\mathfrak{x}_n$ entstehende Reihe (1_0) in ihrer genetischen Aufeinanderfolge dargestellt durch:

$$\mathfrak{t}_i, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i;\ \mathfrak{t}_i, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{z}_i;\ \mathfrak{t}_i, \mathfrak{y}_i, \mathfrak{z}_i;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i, \mathfrak{z}_i \equiv \mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i, \mathfrak{z}_i;\ \mathfrak{t}_i, \mathfrak{y}_i, \mathfrak{z}_i;\ \mathfrak{t}_i, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{z}_i;\ \mathfrak{t}_i, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i,$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es wird sich darum handeln, festzustellen, inwieweit diese Umformungsprozesse selbst und ihr Effekt für die verlangte Reduktion der Reihe (1) in Betracht kommen.

Im allgemeinen wird unter den aus (1_0) ermittelten umzukehrenden Grundfolgen eine erste existieren

$$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m;\ \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m,$$

welche als Bestandteil der Reihe (1) durch Tripel des Elementes $\mathfrak{x}_n$ unterbrochen ist, also etwa die Verbindung involviert:

$$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_1', \mathfrak{y}_1';\ \ldots;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_2', \mathfrak{y}_2';\ \ldots$$
$$\ldots;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_3', \mathfrak{y}_3';\ \ldots;\ \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m.$$

Durch zweckmäfsige Transpositionen ihrer Glieder wird man diese auf die typische Form reduzieren:

$$\ldots;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k;\ \ldots;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m;\ \ldots;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m;\ \ldots;\ \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m;\ \ldots$$

Gemäfs den nach den Inversionen der Tripel

$$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k;\ \ldots;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m$$

geltenden Indices

$J(\mathfrak{x}_i) = \mathfrak{x}_l, \ldots, \mathfrak{x}_n, \ldots, \mathfrak{x}_m, \ldots, \mathfrak{x}_k$ u. $J(\mathfrak{x}_k) = \mathfrak{x}_l, \ldots, \mathfrak{x}_n, \ldots, \mathfrak{x}_m, \ldots, \mathfrak{x}_i$

müssen den Elementwechseln von

$$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m$$

resp. diejenigen der anderen vorangehen

$$\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m,$$

d. h. es mufs ursprünglich die Anordnung bestehen:

$$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k;\ \ldots;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m;\ \ldots;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_l;\ \ldots$$
$$\ldots;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m;\ \ldots;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m;\ \ldots;\ \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m.$$

Da aber nach früheren Ergebnissen zwischen zwei Tripeln

$$\mathfrak{x}_a, \mathfrak{x}_b, \mathfrak{x}_c; \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_a, \mathfrak{x}_b, \mathfrak{x}_d;$$

Verknüpfungen der Bildungsweise illusorisch sind

$$\mathfrak{x}_a, \mathfrak{x}_b, \mathfrak{x}_c;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{a_1}, \mathfrak{x}_{b_1};\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{a_2}, \mathfrak{x}_{b_2} \ldots;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{a_\lambda}, \mathfrak{x}_{b_\lambda};\ \mathfrak{x}_a, \mathfrak{x}_b, \mathfrak{x}_d,$$

wo jedes folgende mit dem vorhergehenden Tripel in zwei Elementen übereinstimmt, kann man die Kette von vorneherein so ansetzen:

$$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_m;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m;\ \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m; \equiv$$
$$\equiv \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k;\ \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_m;\ \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m;\ \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m;\ \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m.$$

Hier ergiebt die Beziehung

$$\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k; \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m \equiv$$

$$\equiv \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k$$

zusammen mit einigen Transpositionen die äquivalente Reihe

$$\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l; \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_m; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k,$$

wo nun der verlangte Prozess thatsächlich wieder ausführbar ist.

Auch die bei der Reduktion der Reihe (1_0) vollzogenen Transpositionen bewahren der erweiterten (1) gegenüber sowohl ihre Ausführbarkeit als ihre Bedeutung. — Denn zwei in der Reihe (1_0) benachbarte in höchstens einem Element übereinstimmende und daher umstellbare Tripel

$$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_{i'}, \mathfrak{x}_{k'}, \mathfrak{x}_{l'}$$

sind in der Reihe (1) allgemeinsten Falles durch eine Folge verbunden

$$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{i_1}, \mathfrak{x}_{k_1}; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{i_2}, \mathfrak{x}_{k_2}; \cdots; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{i_\lambda}, \mathfrak{x}_{k_\lambda}; \mathfrak{x}_{i'}, \mathfrak{x}_{k'}, \mathfrak{x}_{l'},$$

welche man unmittelbar auf die andere zurückführt:

$$\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{i_1}, \mathfrak{x}_{k_1}; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{i_2}, \mathfrak{x}_{k_2}; \cdots; \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k; \cdots; \mathfrak{x}_{i'}, \mathfrak{x}_{k'}, \mathfrak{x}_{l'}; \cdots; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{i_\lambda}, \mathfrak{x}_{k_\lambda}.$$

Weil jedoch die Verbindung

$$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k; \cdots; \mathfrak{x}_{i'}, \mathfrak{x}_{k'}, \mathfrak{x}_{l'}$$

Folgen des Typus

$$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_h; \cdots; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{i'}, \mathfrak{x}_{k'}; \mathfrak{x}_{i'}, \mathfrak{x}_{k'}, \mathfrak{x}_{l'}$$

nach früheren Deduktionen ausschliefst, transformiert man dieselbe in die gesuchte Reihe:

$$\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{i_1}, \mathfrak{x}_{k_1}; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{i_2}, \mathfrak{x}_{k_2}; \cdots; \mathfrak{x}_{i'}, \mathfrak{x}_{k'}, \mathfrak{x}_{l'}; \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_l; \mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k; \cdots.$$

Kennt man also eine die Reihe (1_0) reduzierende Folge von Grundäquivalenzen und Transpositionen, so läfst sich aus dieser mit Bezug auf die Reihe (1) ein analoges System von Grundoperationen ableiten, welches letztere in die Form überführt:

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_n; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_n; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_n; \ldots; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}.$$

Hier leistet die Beziehung

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_n; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_n; \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_n \equiv \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_n; \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{x}_n; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}_n; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$$

die gesuchte Reduktion auf eine solche Reihe, welche höchstens noch $n-1$ Intermediärgruppen enthält.

Da nun die Reduzibilität einer Folge mit einer und zwei Zwischengruppen oben uneingeschränkt nachgewiesen worden, kann man die allgemeine Regel aussprechen:

Jede beliebige Inversionenfolge der Form

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_\mu; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$$

läfst sich durch geeignete Transpositionen und Grundäquivalenzen in eine andere transformieren

$$\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_\mu',$$

welche die sich wiederholende Inversion des Tripels $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nicht mehr enthält.

Dieses Resultat bietet die erforderlichen Vorbedingungen, um die am Eingange des Paragraphen formulierte Hauptfrage betreffend die Gruppen der Fundamentaltripel inäquivalenter Indexsysteme zu definitivem Austrag zu bringen.

Es werde die Elementartransformation des Indexsystemes

$$\text{I.} \quad {}'J(\mathfrak{p}_1), {}'J(\mathfrak{p}_2), \ldots, {}'J(\mathfrak{p}_n)$$

in das andere

$$\bar{\text{I}}. \quad {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_1), {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_2), \ldots, {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_n)$$

bei gleichen Charakteristiken

$$\mathfrak{c}\,(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) = \bar{\mathfrak{c}}\,(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k)$$

geleistet durch die successiven Inversionen der nach den Vorschriften der §§ 11, 12 ermittelten Tripel

$$(1.) \quad \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_\varrho.$$

Dann ermöglicht es die obige Regel, alle ursprünglich vorhandenen oder nachträglich entstehenden durch je zwei sich wiederholende Inversionen eingeschlossenen Verbindungen

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; \mathfrak{T}_{a_1}, \mathfrak{T}_{a_2}, \ldots, \mathfrak{T}_{a_\lambda}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$$

vermöge entsprechender Grundoperationen in eine von jenen freie Folge umzuformen

$$\mathfrak{T}_{a_1}', \mathfrak{T}_{a_2}', \ldots, \mathfrak{T}_{a_\lambda}',$$

und hierdurch aus der Reihe (1) einerseits sämtliche uneigentlichen d. h. in gerader Zahl auftretenden Elementwechsel auszuscheiden, andererseits die eigentlichen d. h. in ungerader Zahl vorhandenen auf je einen Vertreter zu reduzieren.

Man schliefst demnach den wichtigen Satz:

Theorem 18. Jede beliebige zwei inäquivalente Indexsysteme

$${}'J(\mathfrak{p}_1), {}'J(\mathfrak{p}_2), \ldots, {}'J(\mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad {}'J(\mathfrak{p}_1), {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_2), \ldots, {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_n)$$

$$- \mathfrak{c}\,(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) = \bar{\mathfrak{c}}\,(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) -$$

in einander transformierende Inversionenfolge läfst sich in eine irreduzible d. h. eine solche Reihe umformen, welche nur noch die wesentlichen Inversionen und zwar jede genau einmal enthält.

Diese fundamentale Eigenschaft der aufgestellten die beiden gegebenen Indexsysteme I und $\bar{\text{I}}$ verbindende Inversionenfolge gestattet unmittelbar zwei wichtige Folgerungen.

Wie bereits pag. 237 hervorgehoben worden, ergiebt der successive Vergleich aller Paare entsprechender Indices

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_x, \ldots, \mathfrak{p}_y, \ldots \text{ und } '\bar{J}(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_y, \ldots, \mathfrak{p}_x, \ldots$$

eine festbestimmte positive ganze Zahl ϱ' als die Gesamtzahl aller Elementepaare

$$\mathfrak{p}_x, \quad \mathfrak{p}_y,$$

welche in ersteren in umgekehrter Reihenfolge auftreten. Weil aber der Ausgleich der Inäquivalenz der beiden gegebenen Indexsysteme sich einzig und allein vermittelst der Inversionen obiger Reihe von Fundamentaltripeln vollzieht, so zwar, dafs diejenige eines solchen

$$\mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{p}_l$$

in den drei Indices seiner Elemente

$$'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{p}_l, \ldots, \ '\bar{J}(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_l, \ldots, \ '\bar{J}(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_k, \ldots$$

und nur in diesen resp. die Umstellung der drei Elementepaare bewirkt

$$\mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{p}_l; \quad \mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_l; \quad \mathfrak{p}_i, \ \mathfrak{p}_k,$$

wodurch die Zahl ϱ' jedesmal um genau drei Einheiten vermindert wird, und weil zufolge der durchgängigen Verschiedenheit der ausgeführten Inversionen

$$\mathfrak{T}_1, \ \mathfrak{T}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{T}_\varrho$$

keine dieser Umstellungen wieder rückgängig gemacht wird, resultiert zwischen den Gröfsen ϱ' und ϱ die einfache Beziehung:

$$3\varrho = \varrho',$$

und somit als Ergänzung des Theoremes (18) das weitere:

Theorem 18a. Die Anzahl der Inversionen jeder Folge von verschiedenen nach einander hervortretenden Fundamentaltripeln, durch welche zwei gegebene inäquivalente Indexsysteme des angegebenen Charakters in einander elementar übergeführt werden, ist eine von der Bildungsweise der Folge unabhängige invariante Zahl, das sogenannte Mass der Inäquivalenz beider Systeme.

Die zweite Folgerung herzuleiten, betrachte man die den successiven Inversionen der Tripel

$$\mathfrak{p}_{a_0}, \mathfrak{p}_{b_0}, \mathfrak{p}_{c_0} \equiv \mathfrak{T}_0; \quad \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_{\varrho-1}; \quad \mathfrak{T}_\varrho \equiv \mathfrak{p}_{a_\varrho}, \mathfrak{p}_{b_\varrho}, \mathfrak{p}_{c_\varrho}$$

entsprechende vollständige Verbindungsreihe von Zwischensystemen

$$\mathrm{I}, \mathrm{I}', \mathrm{I}'', \ldots, \mathrm{I}^{(\varrho)} \equiv \bar{\mathrm{I}}.$$

Dann folgt aus der durchgängigen Verschiedenheit der Tripel $\mathfrak{T}_h$, dafs das erste $\mathfrak{T}_0$, welchem als einem Fundamentaltripel von I die Charakteristik $c = \pm 1$ zukommt, im zweiten und allen folgenden Systemen die entgegengesetzte ∓ 1 besitzt. Da ganz Analoges rücksichtlich des Fundamentaltripels $\mathfrak{T}_\varrho$ des Systemes $\bar{\mathrm{I}}$ gilt, deduziert man den Satz:

Theorem 18b. Zwei in einem Paare entsprechender Indices und in den Charakteristiken der korrespondierenden Tripel des betreffenden Elementes übereinstimmende inäquivalente Indexsysteme

$$\mathrm{I}. \ {}'J(\mathfrak{p}_1), {}'J(\mathfrak{p}_2), \ldots, {}'J(\mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad \bar{\mathrm{I}}. \ {}'J(\mathfrak{p}_1), {}'\bar{J}(\mathfrak{p}_2), \ldots, {}'J(\mathfrak{p}_n)$$
$$- \ \mathfrak{c}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) = \bar{\mathfrak{c}}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) \ -$$

besitzen stets inäquivalente Gruppen von Fundamentaltripeln.

Dieses Gesetz lässt sich auf jedes beliebige Paar inäquivalenter Indexsysteme ausdehnen.

Man wähle zunächst statt des Systemes I ein ihm äquivalentes I_1, welches sich von jenem nur durch die Drehungsrichtungen einzelner Indices unterscheidet. — Dann ist die fragliche Behauptung evident in dem Falle, wo eines der beiden Systeme I und $\bar{\mathrm{I}}$ auch nur ein einziges in dem anderen nicht vorhandenes Fundamentaltripel aufweist. Wenn dagegen I und $\bar{\mathrm{I}}$ nur in den Charakteristiken gewisser jedem eigentümlicher Fundamentaltripel differieren, so betrachte man gemäfs dem Schema

$$\mathrm{I}_1. \ {}'J(\mathfrak{p}_1), {}'J(\mathfrak{p}_2), \ldots, {}'J(\mathfrak{p}_m), J'(\mathfrak{p}_{m+1}), J'(\mathfrak{p}_{m+2}), \ldots, J'(\mathfrak{p}_n)$$

die den Zusammenhang der beiden Elementegruppen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{p}_{m+2}, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

vermittelnden primären Tripel

$$\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{k_1}, \mathfrak{p}_{l_1}; \ \mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{k_2}, \mathfrak{p}_{l_2}; \ \ldots; \ \mathfrak{p}_{i_\lambda}, \mathfrak{p}_{k_\lambda}, \mathfrak{p}_{l_\lambda},$$
$$(\lambda \geq 3).$$

Da jetzt einerseits irgend ein Tripel

$$\mathfrak{p}_{i_h}, \mathfrak{p}_{k_h}, \mathfrak{p}_{l_h}$$

in den Indexsystemen I und I_1 zufolge der Ausführungen auf pag. 184 und 185 allemal verschiedene Hauptpunkte besitzt, andererseits korrespondierende Fundamentaltripel der Systeme I und $\bar{I}$ gleichnamige Hauptpunkte aufweisen, so herrscht in I_1 und $\bar{I}$ mit bezug auf jedes Tripel obiger Gruppe Inäquivalenz.

Hiernach bleibt zum vollständigen Beweise obiger These noch zu zeigen, dafs auch eine Vertauschung der Elemente $\mathfrak{p}_i$ von I miteinander eine Übereinstimmung der Fundamentaltripel des resultierenden Indexsystemes mit denjenigen von $\bar{I}$ nicht herbeiführen kann. Nach früheren Überlegungen ist nämlich ein in dem geometrisch deutigen Systeme I erfolgender Wechsel zweier Elemente

$$\mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k$$

als gleichwertig zu erachten mit den successiven endlichen Inversionen einer Tripelfolge des Typus:

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{k_1}; \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i_2}, \mathfrak{p}_{k_2}; \cdots; \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i_\alpha}, \mathfrak{p}_{k_\alpha}; \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{l_1}; \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{l_2}; \cdots$$

$$\cdots; \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{l_n-3}; \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{l_n-2}; \mathfrak{p}_k; \mathfrak{p}_{i_\alpha}, \mathfrak{p}_{k_\alpha}; \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{i_\alpha-1}, \mathfrak{p}_{k_\alpha-1}; \cdots; \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{k_1}.$$

Bezeichnet daher $I\left(\frac{i}{k}\right)$ das dadurch entstehende System, und ist die I in $\bar{I}$ transformierende reduzierte Inversionenfolge bestimmt durch die Reihe

$$\mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{b_1}, \mathfrak{p}_{c_1}; \mathfrak{p}_{a_2}, \mathfrak{p}_{b_2}, \mathfrak{p}_{c_2}; \cdots; \mathfrak{p}_{a_\varrho}, \mathfrak{p}_{b_\varrho}, \mathfrak{p}_{c_\varrho},$$

so wird $\bar{I}$ in $I\left(\frac{i}{k}\right)$ durch die Elementwechsel der Folge übergeführt:

(1) $\mathfrak{p}_{a_\varrho}, \mathfrak{p}_{b_\varrho}, \mathfrak{p}_{c_\varrho}; \mathfrak{p}_{a_\varrho-1}, \mathfrak{p}_{b_\varrho-1}, \mathfrak{p}_{c_\varrho-1}; \cdots; \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{b_1}, \mathfrak{p}_{c_1};$

$$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{k_1}; \cdots; \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i_\alpha}, \mathfrak{p}_{k_\alpha}; \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{l_1}; \cdots \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{i_\alpha}, \mathfrak{p}_{k_\alpha}; \cdots; \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{k_1}.$$

Diese Reihe kann man nach bekannten Entwicklungen stets in eine äquivalente andere transformieren, welche nur noch die in ungerader Anzahl auftretenden Tripel, und zwar jedes genau einmal enthält. Je nachdem daher in (1) entweder mindestens ein oder kein solches Tripel vorhanden ist, wird sich dieselbe entweder auf eine Folge durchweg verschiedener Glieder reduzieren

$$\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_\mu,$$

oder sie wird sich selbst vernichten.

Im ersten Falle hat man in

$$\mathfrak{T}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}_\mu$$

zwei Fundamentaltripel von resp.

$$\bar{\mathrm{I}} \quad \text{und} \quad \mathrm{I}\left(\tfrac{i}{k}\right),$$

deren Korrespondenten in

$$\mathrm{I}\left(\tfrac{i}{k}\right) \quad \text{und} \quad \bar{\mathrm{I}}$$

den ihrigen entgegengesetzte Charakteristiken besitzen.

Im zweiten Falle ergeben sich die Inversionenfolgen von

$$\mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{b_1}, \mathfrak{p}_{c_1}; \ldots; \mathfrak{p}_{a_\varrho}, \mathfrak{p}_{b_\varrho}, \mathfrak{p}_{c_\varrho} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{k_1}; \ldots; \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{k_1}$$

als einander äquivalent und folglich die Systeme

$$\bar{\mathrm{I}} \quad \text{und} \quad \mathrm{I}\left(\tfrac{i}{k}\right)$$

als miteinander identisch, eine Konsequenz, die mit der Voraussetzung der Inäquivalenz von I und $\bar{\mathrm{I}}$ im Widerspruch steht.

Zu dem gleichen Schlusse gelangt man, wenn man statt des Systemes $\mathrm{I}\left(\tfrac{i}{k}\right)$ irgend ein andres I_1 zu Grunde legt, welches aus I vermöge der Vertauschung der Folge

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

mit einer ihrer Permutationen hervorgeht

$$\mathfrak{p}_{m_1}, \mathfrak{p}_{m_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{m_n}.$$

Denn da bekanntlich die erste in die zweite Reihe durch ein System successiver Transpositionen benachbarter Elemente übergeht, existiert zwischen I und I_1 eine Verbindung aus einer entsprechenden Anzahl von Durchgangssystemen

$$\mathrm{I}, \mathrm{I}', \mathrm{I}'', \ldots, \mathrm{I}^{(K)}, \mathrm{I}_1,$$

wo jedes folgende aus dem vorhergehenden durch den Wechsel eines Elementepaares entstanden ist. Infolgedessen wird sich zunächst zwischen je zweien dieser und weiter auch zwischen den Systemen

$$\bar{\mathrm{I}} \quad \text{und} \quad \mathrm{I}_1$$

eine Succession endlicher und eindeutiger Inversionen ergeben,

$$\mathfrak{p}_{a_\varrho}, \mathfrak{p}_{b_\varrho}, \mathfrak{p}_{c_\varrho}; \ldots; \mathfrak{p}_{a_1}, \mathfrak{p}_{b_1}, \mathfrak{p}_{c_1}; \mathfrak{T}_1^{\,0}, \mathfrak{T}_2^{\,0}, \ldots, \mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \ldots, \mathfrak{T}_1^{(K)}, \mathfrak{T}_2^{(K)}, \ldots,$$

welche das erste in das letzte System elementar überführt. Indem man diese Reihe dem Theorem (16) gemäfs reduziert, beweist man, wie in dem vorigen Falle, entweder die Existenz eines Fundamentaltripels von $\bar{\mathrm{I}}$, welchem als Tripel von I_1 ein anderer Hauptpunkt zukommt, oder man erkennt die Identität der beiden Indexsysteme.

Definiert man daher als inäquivalent zwei Schemata

$$J(\mathfrak{p}_1),\ J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ J(\mathfrak{p}_n) \quad \text{und} \quad \bar{J}(\mathfrak{p}_1),\ \bar{J}(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ \bar{J}(\mathfrak{p}_n),$$

welche bei jeder innerhalb der einen ausgeführten Permutation der Elemente

$$\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n$$

mindestens rücksichtlich eines Paares entsprechender Indices differieren, die Drehungsrichtungen letzterer sind hierbei irrelevant, so kann man an Stelle des speziellen Theoremes (18b) das allgemeinere formulieren:

Theorem 19. Inäquivalente Indexsysteme besitzen stets inäquivalente Gruppen von Fundamentaltripeln.

Hieraus resultiert aber unter Mitberücksichtigung der pag. 185 entwickelten Beziehungen als Endergebnis der gesamten bisherigen Untersuchungen der allgemeine und fundamentale Satz:

Theorem 20. Ein Indexsystem ist durch die Gruppe seiner vollständig definierten Fundamentaltripel unzweideutig bestimmt.

Auf die geometrische Darstellung übertragen lauten beide Sätze:

19a. Zwei allgemeine ebene Punktesysteme mit differierenden Indexsystemen besitzen stets inäquivalente Systeme von Fundamentaltripeln;

und:

20a. Ein allgemeines ebenes Punktesystem ist durch die Gruppe seiner nach Charakteristiken und Hauptpunkten gegebenen Fundamentaltripel vollkommen und unzweideutig definiert.

Aus der Auffassung eines singulären ebenen Punktesystemes als des gemeinsamen Grenzfalles mehrerer allgemeinen Systeme und aus seiner stets möglichen Rückbildung in letztere folgt unmittelbar der unbeschränkte Geltungsbereich der gewonnenenen Resultate.

§ 14. Vollständige Konstruktion eines Indexsystemes aus der Gruppe seiner Fundamentaltripel.

Die Resultate des vorigen Paragraphen bedürfen der Ergänzung, und zwar nach folgenden zwei Seiten:

Erstens bleibt eine allgemeine stets zutreffende Methode zu ent-

wickeln, wie aus dem bekannten vollständigen Systeme der Fundamentaltripel einer Elementengruppe

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

deren Indexsystem zu bestimmen ist;

zweitens sind die für eine beliebige Kombination von Tripeln einer Elementengruppe

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

notwendigen und hinreichenden Bedingungen festzustellen, damit sie ein vollständiges System von Fundamentaltripeln darstellt.

Beide Aufgaben sind im wesentlichen identisch und nach der gleichen Methode zu behandeln. Dieselbe des näheren zu entwickeln, diene das folgende Beispiel.

Es seien die acht Elemente

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_8$$

entsprechend den in § 7 angegebenen Vorschriften verknüpft durch die Fundamentaltripel:

I. 1) $\mathfrak{p}_5|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_5|\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_8|\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_8|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_7$;

2) $\mathfrak{p}_5|\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_8$; $\mathfrak{p}_6|\mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_6|\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$;

3) $\mathfrak{p}_6|\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_6|\mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_7|\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$;

4) $\mathfrak{p}_7|\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_8|\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4$,

und zwar mögen ihre Charakteristiken unter Bezug auf die vorstehenden Punktefolgen durchgängig als positiv angenommen werden.

Man ordne zunächst diese zwölf Fundamentaltripel gemäfs den acht Centren $\mathfrak{p}_i$ zu den Verkettungen:

$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_4$,

$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7$,

$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7$; $\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$,

$\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_8$; $\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7$; $\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_3$,

$\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3$,

$\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7$; $\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4$,

$\mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6$; $\mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3$; $\mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_8$; $\mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_1$,

$\mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7$; $\mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_1$; $\mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4$; $\mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$; $\mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2$.

Hiernach und zufolge der angegebenen Charakteristiken der zwölf Fundamentaltripel findet man die Indices:

$'J(\mathfrak{p}_1) = ([\mathfrak{p}_3], [\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6], [\mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_4])$, $'J(\mathfrak{p}_2) = ([\mathfrak{p}_4], [\mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1], [\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7])$,

$'J(\mathfrak{p}_3) = ([\mathfrak{p}_1], [\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2], [\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8])$, $'J(\mathfrak{p}_4) = ([\mathfrak{p}_2], [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5], [\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_3])$,

$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7$ $\quad'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8,$
$'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5$ $\quad'J(\mathfrak{p}_8) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2,$
wo in den ersten vier Indices durch ein Symbol

$$([\mathfrak{p}_a], \quad [\mathfrak{p}_b, \mathfrak{p}_c, \mathfrak{p}_d], \quad [\mathfrak{p}_e, \mathfrak{p}_f, \mathfrak{p}_g])$$

die Vertauschbarkeit aller in eckige Klammern eingeschlossenen Elementegruppen mit einander ausgedrückt werden soll.

Eine nähere Betrachtung der für den Index des Elementes $\mathfrak{p}_1$ in Frage kommenden zwei Bildungen

$$1) \quad 'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_4$$

und

$$2) \quad 'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$$

zeigt, dafs die erste nach Theorem (6 b) unvereinbar ist mit den Indices $'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8$ und $'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5,$ die zweite dagegen zusammen mit dem Index

$$'J(\mathfrak{p}_7) = \cdots, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_1, \cdots$$

auf Grund des nämlichen Satzes den dritten bestimmt:

$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8.$$

Ganz analog folgt dann aus den Indices

$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$ und $'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7$

— die andere freistehende Annahme

$$'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$$

widerspricht den Indices

$'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5$ und $'J(\mathfrak{p}_8) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2$ —

auch der vierte unbekannte Index in der eindeutigen Form:

$$'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_3.$$

Um jetzt weiter festzustellen, ob dieses eindeutig ermittelte Schema auch wirklich ein Indexsystem definiert, hat man rücksichtlich der 56 verschiedenen Elementetripel

$$\mathfrak{p}_a, \quad \mathfrak{p}_b, \quad \mathfrak{p}_c$$

die zugehörigen Indices

$$'J(\mathfrak{p}_a), \quad 'J(\mathfrak{p}_b), \quad 'J(\mathfrak{p}_c)$$

daraufhin zu prüfen, ob sie die charakteristischen Formen zeigen:

$$J(\mathfrak{p}_a) = \mathfrak{p}_b, [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots, \mathfrak{r}_\beta], \mathfrak{p}_c, [\cdots],$$
$$J(\mathfrak{p}_b) = \mathfrak{p}_a, [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_\alpha, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \cdots, \mathfrak{s}_\gamma], \mathfrak{p}_c, [\cdots],$$
$$J(\mathfrak{p}_c) = \mathfrak{p}_a, [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots, \mathfrak{r}_\beta, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \cdots, \mathfrak{s}_\gamma], \mathfrak{p}_b, [\cdots].$$

Je nachdem alle 56 Fälle übereinstimmend eine derartige Darstellung

aufweisen, oder nicht, wird das Schema entweder mindestens ein oder kein einziges Indexsystem repräsentieren.

Neben diesem zwar stets zum Ziele führenden, oft aber sehr umständlichen Verfahren ist noch eine zweite Lösungsmethode hervorzuheben. Dieselbe stützt sich auf das Theorem (19) und beruht auf dem Gedanken, ein bekanntes Indexsystem durch eine passend gewählte Folge von Inversionen in ein solches zu transformieren, welches die vorgeschriebene Gruppe von Fundamentaltripeln aufweist und das demnach ein zu letzterer gehöriges Indexsystem bestimmt.

Die Methode an dem obigen Beispiel zu illustrieren, gehe man aus von dem bekannten Indexsysteme:

I'. $'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$, $'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$,
$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$, $'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$,
$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$, $'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$,
$'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_8$, $'J(\mathfrak{p}_8) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7$,

welches dem positiv konvexen Achteck entspricht

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8,$$

und schreibe das gesuchte Indexsystem in der schon oben gewonnenen Form:

I. $'J(\mathfrak{p}_1) = (\mathfrak{p}_3, [\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6], [\mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_4])$, $'J(\mathfrak{p}_2) = (\mathfrak{p}_4, [\mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1], [\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7])$,
$'J(\mathfrak{p}_3) = (\mathfrak{p}_1, [\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2], [\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8])$, $'J(\mathfrak{p}_4) = (\mathfrak{p}_2, [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5], [\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_3])$,
$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7$, $'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8$,
$'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5$, $'J(\mathfrak{p}_8) = \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2$.

Behufs der Überführung des Index

$$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$$

in die Form

$$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_2$$

vollziehe man zunächst die Elementwechsel:

$$\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6.$$

Das dadurch entstehende Partialschema

$$'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \quad .$$
$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$, $'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$,
$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$, $'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$

geht durch die weiteren Inversionen der Tripel

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5$$

über in das andere:

$$'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8,$$

$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8,$ $'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8,$

$'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8,$ $'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8.$

Die jetzt nach einander möglichen Elementwechsel von

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5$$

ergeben:

$'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8,$ $'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8,$

$'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8,$ $'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8.$

Wendet man auf diese und die Indices

$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8,$ $'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_8$

die Inversionen an

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3; \mathfrak{p}_7; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7,$$

so erhält man:

$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_8,$$

$'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_8,$ $'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_8,$

$'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_8,$ $'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_8.$

Nachdem dann vermöge der Inversion von

$$\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5$$

die Indices abgeleitet worden

$'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_8,$ $'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_8,$

$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_8,$

liefern schliefslich die Elementwechsel

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_8; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8; \quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_8$$

die Darstellungen:

$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_2,$ $'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_2,$

$'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3,$ $'J(\mathfrak{p}_8) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7,$

$'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_2.$

Als Endresultat der bisherigen Transformation erhält man also das Indexsystem:

I,. $'J(\mathfrak{p}_5) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_2,$ $'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8,$

$'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_8,$ $'J(\mathfrak{p}_8) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7,$

$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8,$ $'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3,$

$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_2,$ $'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_2,$

Behufs der Überführung des Index

$$'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$$

in den anderen

$$'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8$$

vollziehe man zunächst die Inversionen der successive hervortretenden Fundamentaltripel:

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3;\quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4;\quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4;\quad \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6.$$

Man gelangt dadurch zu dem Schema:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \quad 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5,$$
$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_8,$$
$$'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8.$$

Vermöge der Elementwechsel von

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7$$

findet man:

$$'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5, \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5$$
$$'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8, \quad 'J(\mathfrak{p}_6) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8$$

und erhält so das System:

$$'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8, \quad 'J(\mathfrak{p}_8) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7,$$
$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \quad 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5,$$
$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_8.$$

Entsprechend dem gesuchten Index

$$'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5$$

liefern die Inversionen der Tripel

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_8 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7:$$

$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \quad 'J(\mathfrak{p}_8) = \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6,$$
$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_7, \quad 'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8,$$

und darauf diejenige von

$$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8:$$

$$'J(\mathfrak{p}_7) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_4, \quad 'J(\mathfrak{p}_8) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6,$$
$$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \quad 'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5,$$
$$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1, \quad 'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_8.$$

Ein Vergleich dieses und des unbestimmten von vornehercin 2^4 deutigen Indexsystemes $\overline{\mathrm{I}}$ ergiebt unmittelbar:

1) die volle Übereinstimmung beider in den vier Paaren entsprechender Indices

$$'J(\mathfrak{p}_5), \quad 'J(\mathfrak{p}_6), \quad 'J(\mathfrak{p}_7), \quad 'J(\mathfrak{p}_8),$$

2) die Identität der Indices

$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$ und $'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$

mit den nach $\bar{\mathrm{I}}$ zulässigen Formen

$'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_3, [\mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_4], [\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6]$ und $'J(\mathfrak{p}_2) = [\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7], \mathfrak{p}_4, [\mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1]$.

3) die genau entgegengesetzten Bildungsweisen von

$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$ und $'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_1$

gegenüber den nach I möglichen Annahmen

$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, [\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2], [\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8]$ und $'J(\mathfrak{p}_1) = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5], \mathfrak{p}_2, [\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_3]$.

Es geschieht aber die Transformation der Indices

$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_1$ und $'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_1$

in die inversen

$'J(\mathfrak{p}_3) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8$ und $'J(\mathfrak{p}_4) = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_8, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_3$

nach einem Zusatze zu Theorem (13) durch eine gewisse Folge der $2 \cdot 21$ Inversionen

$$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k,$$
$$(i, k = 1, 2, 5, 6, 7, 8)$$

ohne dafs durch dieselben die sechs anderen Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1), \quad 'J(\mathfrak{p}_2), \quad 'J(\mathfrak{p}_5), \quad 'J(\mathfrak{p}_6), \quad 'J(\mathfrak{p}_7), \quad 'J(\mathfrak{p}_8)$$

irgendwie alteriert werden.

Also läfst sich das ursprünglich gegebene Indexsystem I durch eine ganz bestimmte Succession von Inversionen thatsächlich in ein anderes $\bar{\mathrm{I}}$ überführen, welches in der Gruppe seiner Fundamentaltripel mit der vorgeschriebenen vollkommen übereinstimmt, welches folglich ein zu dieser gehöriges Indexsystem darstellt.

Das hier behandelte ideale System von Fundamentaltripeln definiert eine allgemeine Punktgruppe

$$\mathfrak{P}_8 \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_8,$$

gebildet aus dem einfachen positiven Vierecke

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$$

und vier in resp. den Flächen

$$\Delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2), \quad \Delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3), \quad \Delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4), \quad \Delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_1)$$
$$\left(\mathfrak{q} \equiv (|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3|, \quad |\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4|)\right)$$

derartig fixierten Punkten

$$\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8,$$

dafs die beiden Geradenpaare

$$|\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6|, \ |\mathfrak{p}_7, \mathfrak{p}_8| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_8|, \ |\mathfrak{p}_6, \mathfrak{p}_7|$$

die Diagonalen

$$|\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_1| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_2|$$

in den Strecken treffen

$$\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_\infty \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_\infty .$$

Da bei der Elementartransformation eines ganz beliebigen Indexsystemes

$$'J(\mathfrak{p}_1), \quad 'J(\mathfrak{p}_2), \ \ldots, \ 'J(\mathfrak{p}_n)$$

in ein bekanntes oder unbekanntes anderes die Umwandlung irgend eines Index in den inversen ohne Änderung der anderen allemal durch die Inversionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ successive auftretenden Fundamentaltripeln zu erreichen ist, und da zwei nur in den Drehungsrichtungen einzelner Paare entsprechender Indices unterschiedene Indexsysteme in den Gruppen und den Verkettungen der Fundamentaltripel korrespondieren, kann die gesuchte Überführung entweder bereits dann als geleistet oder ihre Unmöglichkeit als erwiesen angesehen werden, wenn entweder unter den successive resultierenden Indexsystemen, wie in dem vorstehenden Beispiel das System I_3, ein erstes die der vorgeschriebenen analoge Verknüpfung von Fundamentaltripeln aufweist, oder bei einer durch die Aufgabe geforderten Transformation ein Widerspruch mit deren Voraussetzungen zu Tage tritt.

Das Theorem 17 bietet ein allgemeines Mittel, die Bestimmung des gesuchten Indexsystemes, mag dieselbe auf die eine oder die andere der geschilderten Methoden erfolgen, planmäfsig abzukürzen. Danach hat man das System $\mathfrak{P}_n$ entsprechend den gegebenen Fundamentaltripeln $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}_l$ so in zwei Gruppen $\mathfrak{P}_m$ und $\mathfrak{P}_{n-m}$ zu teilen, dafs von den Fundamentaltripeln der zweiten Gruppe mindestens je ein Element der ersten angehört, und dann mit Bezug auf die Indices der Elemente letzterer die betreffenden Feststellungen auszuführen.

In dem obigen Beispiele ergiebt eine derartige Teilung des Systemes $\mathfrak{P}_8$ die beiden Gruppen

$$\mathfrak{p}_1, \ \mathfrak{p}_2, \ \mathfrak{p}_4, \ \mathfrak{p}_5 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_3, \ \mathfrak{p}_6, \ \mathfrak{p}_7, \ \mathfrak{p}_8,$$

so dafs zugleich mit den vier Indices

$$'J(\mathfrak{p}_1), \ 'J(\mathfrak{p}_2), \ 'J(\mathfrak{p}_4), \ 'J(\mathfrak{p}_5)$$

auch die vier anderen vollkommen und eindeutig definiert sind.

Anhang.

§ 15. Das endliche ebene Geradensystem.

Entsprechend den beiden Grundeinheiten, welche die Anschauung im Gebiete der Ebene unterscheidet,

dem Punkte und der Geraden,

bietet sich als zweites dem endlichen Punktsysteme

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

koordiniertes Grundgebilde das endliche Geradensystem

$$G_n \equiv g_1, g_2, \ldots, g_n.$$

Die schon in den Grundbeziehungen der beiden Elemente, der Definition des einen durch zwei Individuen des anderen, mit den daraus resultierenden Konsequenzen sich offenbarende absolute Reciprocität bleibt den zusammengesetzten Gebilden gegenüber in vollem Umfange bestehen.

Am ursprünglichsten tritt sie zu Tage in deren Stammformen:

dem allgemeinen Punktetripel	dem allgemeinen Geradentripel
$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$	g_i, g_k, g_l
mit seinen drei Verbindungsgeraden	mit seinen drei Durchschnittspunkten
$\lvert\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l\rvert \equiv g_i; \lvert\mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i\rvert \equiv g_k; \lvert\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k\rvert \equiv g_l.$	$(g_k, g_l) \equiv \mathfrak{p}_i; (g_l, g_i) \equiv \mathfrak{p}_k; (g_i, g_k) \equiv \mathfrak{p}_l.$

Bei der Ausführlichkeit, welche die diesbezüglichen Betrachtungen in § 1 gefunden haben, genügen hier die wesentlichsten Gegenüberstellungen.

Es teilen die drei Elemente

$\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$	g_i, g_k, g_l
das ebene Strahlenfeld in die vier Strahlenkontinuen oder Primärscharen	das ebene Punktfeld in die vier Punktkontinuen oder Primärflächen
$\mathfrak{p}_i \mid \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l;\ \mathfrak{p}_k \mid \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l;\ \mathfrak{p}_l \mid \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k;$ $\mathfrak{p}_\infty \mid \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l.$	$g_i \mid g_k, g_l;\ g_k \mid g_i, g_l;\ g_l \mid g_i, g_k;$ $\triangle (g_i, g_k, g_l).$
Jede derselben wird begrenzt von	
drei Primärwinkeln mit je zwei Grenzstrahlen.	drei Primärstrecken mit je zwei Grenzecken.

In einem Primärwinkel grenzen zwei, in einem Grenzstrahle alle vier Primärscharen aneinander.	In einer Primärstrecke grenzen zwei, in einer Grenzecke alle vier Primärflächen aneinander.

Die Auszeichnung einer Seite der Ebene als der Bild- oder Operationsfläche läfst noch zwei situell verschiedene Anordnungsweisen der Elemente des Stammtripels unterscheiden.

Es erscheint nämlich die Folge

$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$	$g_i,\ g_k,\ g_l$

als positiv bzw. als negativ, je nachdem ein die Begrenzung des Gebietes

$\triangle\ (g_i,\ g_k,\ g_l)$	$\mathfrak{p}_\infty \mid \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$
umschreibender Punkt	durchstreichender Strahl

für einen die Bildfläche betrachtenden Beobachter

eine linksseitige oder eine rechtsseitige

Fortschreitungsrichtung verfolgt.

Auf den ersten Thatsachen beruht die Auffassung der zusammengesetzten Gebilde

$$\mathfrak{P}_n \quad \text{und} \quad G_n$$

als Grenzmarken einer ganz bestimmten Einteilung

des ebenen Strahlenfeldes bzw. des ebenen Punktfeldes

in einer Anzahl sich ausschliefsender wohldefinierter Kontinuen,

in Primärscharen . in Primärflächen,

worin zugleich mit der allgemeinen oder projektiv invarianten Eigenart beider Gebilde ein sie in allen Teilen beherrschender Dualismus zur Erscheinung kommt.

Die subjektive Unterscheidung positiver und negativer Elementefolgen

$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$	$g_i,\ g_k,\ g_l$

führt zu der engeren Definition des Charakters eines in der Ebene beliebig aber fest gegebenen Grundgebildes durch das System der Charakteristiken seiner Elementetripel.

Hier zeigt es sich jedoch, dafs die aus den dualen Stammformen des Punkte- und des Geradentripels scheinbar selbständig abstrahierten Begriffe ihrer Charakteristiken thatsächlich aus einer einzigen und zwar der ersten Quelle geschöpft worden und deshalb nur für das Punktgebilde Bedeutung haben. Denn während in einem solchen die lineale Inversion eines primären Tripels

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

sowohl den projektiven Charakter des Gebildes $\mathfrak{P}_n$ als auch die eigene Charakteristik ändert, bewirkt die centrale Kreuzung eines primären Geradentripels

$$g_i,\ g_k,\ g_l$$

zwar auch eine entsprechende Alteration im Charakter des Geradensystemes, läfst aber die Charakteristik des Tripels bestehen. Die obige Definition derselben entspricht eben nicht der Natur der Geradenfolge

$$g_i,\ g_k,\ g_l$$

sondern vielmehr derjenigen der Punktefolge

$$(g_k,\ g_l) \equiv \mathfrak{p}_i;\ (g_l,\ g_i) \equiv \mathfrak{p}_k;\ (g_i,\ g_k) \equiv \mathfrak{p}_l,$$

und diese bewahrt bei den successiven oder wie im Falle der Kreuzung der drei Strahlen bei gleichzeitigem Durchgang zweier Elemente durch das dritte ihr Vorzeichen. Was unter der Charakteristik eines allgemeinen Geradentripels — der Einflufs der Kreuzung eines primären Tripels auf den Charakter des zusammengesetzten Gebildes G_n macht den Begriff unentbehrlich — eigentlich zu verstehen, ist hiernach zunächst noch ungewifs.

Eine eingehende in § 3 durchgeführte Untersuchung hat ergeben, dafs rücksichtlich jedes beliebigen Punktsystemes

$$\mathfrak{P}_n \equiv \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n$$

zwischen dem Vereine der Charakteristiken seiner n_3 Tripel

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

und den ihren Drehungsrichtungen nach bestimmten Indices seiner n Elemente

$$'J(\mathfrak{p}_1),\ 'J(\mathfrak{p}_2),\ \ldots,\ 'J(\mathfrak{p}_n)$$

eine eindeutig umkehrbare Abhängigkeit statthat, und es war dann der übersichtliche Schematismus des Indexsystemes, welcher die weitere Entwicklung der Theorie bis in ihre letzten Konsequenzen beherrscht hat.

Die Entscheidung der Frage, inwieweit der Dualismus zwischen dem Punkt- und dem Geradensysteme sich erstreckt und folglich mit der Untersuchung des einen diejenige des anderen überflüssig macht, gipfelt in dem Probleme der Aufstellung eines dem Indexsysteme des ersteren genau entsprechenden Darstellungsmittels des letzteren.

Im Verfolg dieses Bemühens macht sich zunächst ein schon in den Grundwahrnehmungen des Punktes und der Geraden kenntlicher Gegensatz geltend, der den behaupteten Parallelismus in Frage zu stellen scheint.

Für jede Stellung des Beobachters in einem Punkte der Ebene als dem Centrum eines Strahlenbüschels vindiziert die Möglichkeit links- und rechtsseitiger eigener Drehung stets dieselben zwei Fortschreitungsrichtungen eines in dem Büschel beweglichen Strahles. Diese eindeutige Beziehung entgegengesetzter geometrischer Bewegungsvorgänge im Strahlenbüschel auf eine von dem jeweiligen Standort unabhängige invariante Eigenschaft des Urteilenden bietet die allgemeine Grundlage der eindeutigen Begriffsbildung des Indexsystemes irgend einer ebenen Punktgruppe.

Im Gegensatz hierzu besteht zwischen den beiden Fortschreitungsrichtungen eines eine Gerade beschreibenden Punktes und der Vorwärts- und Rückwärtsbewegung des sie abschreitenden Beobachters kein derartiger natürlicher Zusammenhang. Es kann vielmehr dieser in jedem Standort durch eine Wendung von 180^0 das gerade bestehende Verhältnis stets umkehren. Mit bezug auf ein ebenes Geradensystem

$$G_n \equiv g_1, g_2, \ldots, g_n$$

fehlt deshalb vorerst ein Mittel, die Fortschreitungsrichtungen auf der einzelnen Geraden g_i und damit auch die ihnen entsprechenden Aufeinanderfolgen der Durchschnittspunkte dieser mit den $n-1$ anderen zu unterscheiden.

Abstrakt gefafst findet der bestehende Gegensatz seine Erklärung in dem ideellen Gebilde der unendlich fernen Geraden und deren besonderer apriorischer Bedeutung für das Punktfeld. Diese Gerade g_∞ zerschneidet nämlich das letztere in ein einfach zusammenhängendes Gebiet, in welchem zwischen zwei beliebigen Elementen stets ein und nur ein linealer stetiger Übergang, nämlich der endliche möglich ist.

Indem daher einem beliebigen Punkte der Ebene dem Centrum eines Strahlenbüschels eine bestimmte Drehungsrichtung als positive beigelegt und bei allen seinen kontinuierlich erfolgenden linealen Dislokationen festgehalten wird, läfst sich dieselbe auf jeden anderen Punkt des Feldes unzweideutig übertragen.

Dem linealen Übergange zweier Punkte im Punktefelde durch stetige Bewegung auf ihrer Verbindungsgeraden entspricht die centrale Vereinigung zweier Strahlen im Strahlenfelde durch stetige Drehung um ihren Schnittpunkt. Hier stehen die beiden Möglichkeiten links- und rechtsseitiger Drehung in ihrer Beziehung zur unendlich fernen Geraden einander ganz gleichberechtigt gegenüber. Das nahe liegende Auskunftsmittel, die linksseitige Rotation ein für

allemal als Übergangsweise zu wählen und dadurch nach Fixierung einer positiven und negativen Fortschreitungsrichtung auf der einen Geraden dieselben auch für alle übrigen festzulegen, stöfst, abgesehen von dem dann gestörten Dualismus zwischen den beiden Grundgebilden, auf die andere Unzuträglichkeit, dafs bei etwaigen Bewegungen des gesamten Systemes die centrale Drehung einer Geraden um 180^0 die ihr zukommenden Fortschreitungsrichtungen doch wieder umkehrt.

Beiden Übelständen wird dadurch zweckmäfsig begegnet, dafs man der natürlichen Grenzscheide im ebenen Punktfelde, der unendlich fernen Graden g_∞ eine entsprechende künstliche im ebenen Strahlenfelde, den beliebigen aber festen Punkt $\mathfrak{p}_0$ gegenüberstellt. Alsdann repräsentiert die doppelt unendliche Geradenmannigfaltigkeit gleichfalls ein einfach zusammenhängendes Kontinuum, insofern als zwischen irgend zwei Individuen genau ein stetiger centraler Übergang aufserhalb des Grenzpoles $\mathfrak{p}_0$ vorhanden ist.

Ein linksseitig oder in positivem Sinne um den Pol $\mathfrak{p}_0$ rotierender Strahl fixiert auf jeder diskreten Geraden eine ganz bestimmte Richtung, identisch derjenigen, bei welcher ein die Gerade verfolgender Beobachter den Pol zu seiner Linken liegen hat. Diese Fortschreitungsrichtung auf der Geraden soll als die positive, die ihr entgegengesetzte als die negative bezeichnet werden. Eine Unbestimmtheit besteht einzig und allein für die Strahlen des Büschels $\mathfrak{p}_0$, bei dessen Passieren seitens einer Geraden deren Richtungen wechseln.

Im Falle eines zusammengesetzten Geradensystemes

$$G_n \equiv g_1, g_2, \ldots, g_n$$

genügt daher die Wahl eines aufserhalb der n Geraden liegenden Punktes zum Grenzpole $\mathfrak{p}_0$, um das Indexsystem von G_n eindeutig festzulegen gemäfs dem Schema:

$$\begin{aligned}
'J(g_1) &= g_2', g_3', \ldots, g_n', \\
'J(g_2) &= g_2'', g_3'', \ldots, g''_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
'J(g_n) &= g_2^{(n)}, g_3^{(n)}, \ldots, g_n^{(n)},
\end{aligned}$$

wo allgemein mit

$$g_{i'_2}, g_{i'_3}, \cdots g_{i'_n}$$

eine solche Aufeinanderfolge der Geraden bezeichnet wird

$$g_1, g_2, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n,$$

in welcher ein g_i in positivem Sinne durchlaufender Punkt den letzteren begegnet.

Die Einführung des Grenzpoles $\mathfrak{p}_0$ bietet nun auch das Mittel, den Begriff der Charakteristik eines allgemeinen Geradentripels zu präzisieren.

Sind die drei Geraden einer positiven Aufeinanderfolge ihrer Parallelstrahlen im Büschel $\mathfrak{p}_0$ bezw. ihrer Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden g_∞ entsprechend dargestellt durch

$$g_i,\ g_k,\ g_l,$$

so passiert ein das Büschel $\mathfrak{p}_0$ in gleichem, also positivem Sinne beschreibender Strahl die gegenseitigen Durchschnitte der drei Strahlen

$$(g_k,\ g_l) \equiv \mathfrak{p}_i;\ (g_l,\ g_i) \equiv \mathfrak{p}_k;\ (g_i,\ g_k) \equiv \mathfrak{p}_l$$

entweder in der entsprechenden Folge

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

oder in der entgegengesetzten

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_k.$$

Im ersten Falle besitzt das Tripel die Charakteristik

$$\mathfrak{c}\,(g_i,\ g_k,\ g_l) = +\,1,$$

im zweiten die inverse

$$\mathfrak{c}\,(g_i,\ g_k,\ g_l) = -\,1.$$

Das Tripel wechselt seine Charakteristik allemal und nur in drei Fällen:

1. bei der Kreuzung seiner Elemente d. h. mittelst Übersetzens eines singuläres Tripels der Charakteristik

$$\mathfrak{c}\,(g_i,\ g_k,\ g_l) = 0,$$

2. beim Durchgange eines Elementes durch den Grenzpol,

3. bei der Kreuzung zweier Elemente mit der Geraden g_∞.

In dem letzten Umstande liegt der Grund dafür, dafs zwischen den jetzt vollkommen und unzweideutig definierten Systemen der n Indices $'J(g_i)$ und der n_3 Charakteristiken $\mathfrak{c}\,(g_i,\ g_k,\ g_l)$ des Geradengebildes G_n eine eindeutig umkehrbare Abhängigkeit nicht stattfindet.

Denn konstruiert man das Schnittpunktsystem der n Geraden und das zu diesem gehörige Aufsenpolygon, so kann man, wie eine passende Projektion der Ebene in eine andere zeigt, eine beliebige Ecke $(g_i,\ g_k)$ derselben, und nur diese, durch stetige Bewegungen der n Geraden zum Übertritt über die unendlich ferne Gerade bringen. Dieser Vorgang läfst sowohl die Indices der Geraden

$$'g_i \quad \text{und} \quad g_k$$

als auch diejenigen aller anderen unberührt, während er die Charakteristiken der $n-2$ Geradentripel

$$g_i,\ g_k,\ g_h$$

in die entgegengesetzten verwandelt. Das Indexsystem bringt mithin den Charakter des Geradengebildes G_n scheinbar nicht vollständig zum Ausdruck.

Thatsächlich erklärt sich dieser Widerspruch indessen so, dafs durch die Gesamtheit der Charakteristiken $\mathfrak{c}\,(g_i, g_k, g_l)$ nicht sowohl der Charakter des Systemes G_n, sondern derjenige des um die unendlich ferne Gerade g_∞ erweiterten G_{n+1} definiert wird. Die Aufnahme des jedesmaligen Schnittpunktes einer Geraden g_i mit g_∞ in den Index

$$'J(g_i) = g_{i'_2},\ g_{i'_3},\ \ldots,\ g_\infty,\ \ldots,\ g_{i'_n}$$

zusammen mit dem $n+1^{\text{ten}}$

$$'J(g_\infty) = g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n$$

stellt denn auch die geforderte Äquivalenz zwischen Charakteristiken und Indexsystem in vollem Mafse wieder her.

Indem man den von der Wahl des Poles $\mathfrak{p}_0$ unabhängigen Index der unendlich fernen Geraden rücksichtlich eines beliebigen allgemeinen Geradentripels in der Form wählt

$$'J(g_\infty) = g_i,\ g_k,\ g_l$$

also die negative Punktefolge annimmt,

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

findet man zur eindeutigen Unterscheidung der Charakteristiken

$$1)\ \mathfrak{c}\,(g_i, g_k, g_l) = -1 \quad \text{und} \quad 2)\ \mathfrak{c}\,(g_i, g_k, g_l) = +1$$

gemäfs den Lagen des Punktes $\mathfrak{p}_0$ in resp. den Flächen*)

1.) a) $F(\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l)$, b) $F(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l)$, c) $F(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k)$,

2.) a) $F(\mathfrak{p}_i)$, b) $F(\mathfrak{p}_k)$, c) $F(\mathfrak{p}_l)$, d) $\triangle(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l)$

die Schemata:

1) a) $'J(g_i) = g_k, g_\infty, g_l$, $'J(g_k) = g_i, g_\infty, g_l$, $'J(g_l) = g_\infty, g_i, g_k$,

b) $'J(g_i) = g_\infty, g_k, g_l$, $'J(g_k) = g_l, g_\infty, g_l$, $'J(g_l) = g_k, g_\infty, g_i$,

c) $'J(g_i) = g_\infty, g_k, g_l$, $'J(g_k) = g_l, g_i, g_\infty$, $'J(g_l) = g_k, g_i, g_\infty$;

2) a) $'J(g_i) = g_\infty, g_k, g_l$, $'J(g_k) = g_l, g_\infty, g_i$, $'J(g_l) = g_k, g_i, g_\infty$,

b) $'J(g_i) = g_k, g_\infty, g_l$, $'J(g_k) = g_i, g_\infty, g_l$, $'J(g_l) = g_\infty, g_k, g_i$,

*) Die erstgenannten stellen die Seiten-, die zweitgenannten die Scheitelflächen des endlichen Dreiecks $\triangle(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l)$ dar.

c) $'J(g_i) = g_k, g_\infty, g_l$, $'J(g_k) = g_i, g_l, g_\infty$, $'J(g_l) = g_\infty, g_i, g_k$,
d) $'J(g_i) = g_\infty, g_k, g_l$, $'J(g_k) = g_l, g_i, g_\infty$, $'J(g_l) = g_k, g_\infty, g_i$.

Die Inversion des Geradentripels involviert zugleich mit der Vertauschung der Charakteristiken

$$\mathfrak{c}(g_i, g_k, g_l) = \pm 1$$

eine solche der beiden ihnen eigentümlichen Flächensysteme, läfst daher das vorstehende Verhältnis ungeändert. Ein Vergleich dieser durch den Index $'J(g_\infty)$ vervollständigten Systeme mit den in § 3 pag. 25 unterschiedenen drei Gattungen solcher

$$\begin{aligned}
\text{I. } 'J(\mathfrak{p}_i) &= \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \; 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \\
'J(\mathfrak{p}_l) &= \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \; 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k; \\
\text{II. } 'J(\mathfrak{p}_i) &= \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \; 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \\
'J(\mathfrak{p}_l) &= \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \; 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i; \\
\text{IV. } 'J(\mathfrak{p}_i) &= \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_m, \; 'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_l, \\
'J(\mathfrak{p}_l) &= \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \; 'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i
\end{aligned}$$

zeigt, dafs die drei Systeme der ersten Kategorie unter den Typus I, die vier der zweiten aber unter den anderen II fallen, dafs mithin das Theorem (1) nebst allen seinen Konsequenzen auch im Geradensystem seine volle Geltung bewahrt.

Wie durch die Verlegung der unendlich fernen Geraden in die verschiedenen Primärscharen einer Punktgruppe $\mathfrak{P}_n$, so werden auch durch die Wählbarkeit des Grenzpoles $\mathfrak{p}_0$ innerhalb der einzelnen Primärflächen des Geradensystemes G_n alle überhaupt möglichen eindeutigen Auffassungen des Indexsystemes bestimmt, welche, einander völlig gleichberechtigt, sich geometrisch veranschaulichen lassen. Hierbei kommt für das System G_n die Sonderstellung der Geraden g_∞ nicht in betracht, weil die Annahme des Poles $\mathfrak{p}_0$ in zwei durch g_∞ geschiedenen Teile einer Primärfläche absolut entgegengesetzte Indexsysteme involviert, die wegen der doppelten Bildfläche der Ebene als identisch aufzufassen sind.

Sieht man von diesen relativen Verschiedenheiten ab und betrachtet ganz allgemein das charakteristische Indexsystem

$$J(g_1), J(g_2), \ldots, J(g_n),$$

so weist dasselbe genau die gleichen Grundeigenschaften auf, wie das entsprechende Schema einer Punktgruppe, nämlich die durch das Theorem (6) ausgesprochenen fundamentalen Bildungsgesetze.

Es resultieren nämlich aus der Betrachtung des vollständigen Dreiseites

$$g_i,\ g_k,\ g_l$$

und der seine vier Primärflächen begrenzenden Strecken

$$\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_l - \mathfrak{p}_i,$$

$$\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_\infty - \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_k - \mathfrak{p}_\infty - \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_l - \mathfrak{p}_\infty - \mathfrak{p}_i,$$

wenn die denselben zugehörigen Geradenscharen bezeichnet werden durch resp.

$$\mathfrak{p}_i|_1\,\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_k|_1\,\mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_l|_1\,\mathfrak{p}_i,$$

$$\mathfrak{p}_i|_2\,\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_k|_2\,\mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_l|_2\,\mathfrak{p}_i,$$

zwischen letzteren und den Primärscharen

$$\mathfrak{p}_i \mid \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l;\ \mathfrak{p}_k \mid \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_l;\ \mathfrak{p}_l \mid \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k;\ \mathfrak{p}_\infty \mid \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

die Relationen:

$$1)\ \mathfrak{p}_x|_1\,\mathfrak{p}_y + \mathfrak{p}_x|_1\,\mathfrak{p}_z = \mathfrak{p}_y|_1\,\mathfrak{p}_z + 2\,\mathfrak{p}_x \mid \mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z,$$

$$2)\ \mathfrak{p}_x|_2\,\mathfrak{p}_y + \mathfrak{p}_x|_2\,\mathfrak{p}_z = \mathfrak{p}_y|_1\,\mathfrak{p}_z + 2\,\mathfrak{p}_\infty \mid \mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z,$$

$$x,\ y,\ z = [i;\ k,\ l].$$

An diesen Grundthatsachen wird dadurch, dafs von den drei Geraden die eine g_l kontinuierlich in die unendlich ferne übergeht, nichts geändert. Die vier Primärscharen

$$\mathfrak{p}_l \mid \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k;\ \mathfrak{p}_k \mid \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_l;\ \mathfrak{p}_i \mid \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l;$$

$$\mathfrak{p}_\infty \mid \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

werden dann durch die vier Paare von Halbstrahlen bestimmt:

$$+g_i,\ +g_k;\ +g_i,\ -g_k;\ -g_i,\ +g_k;\ -g_i,\ -g_k.$$

Beide Grundformeln behalten uneingeschränkt ihre Gültigkeit, wenn unter den Symbolen

$$\mathfrak{p}_x|_1\,\mathfrak{p}_y;\ \mathfrak{p}_x|_2\,\mathfrak{p}_y;\ \mathfrak{p}_x|\mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z;\ \mathfrak{p}_\infty|\mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z$$

nicht sowohl, wie üblich, die vollständigen Strahlenkontinuen, sondern die diesen zugehörigen Elemente des Geradengebildes G_n verstanden werden. In dieser Auffassung liefern sie die für das Theorem (6) und seine Konsequenzen mafsgebenden Grundregeln.

Hiermit ist die völlige formale Identität der Indexsysteme beider Grundgebilde nachgewiesen. Es repräsentieren das Punkt- und das Geradensystem zwei gleichberechtigte (duale oder reziproke) geometrische Interpretationen eines einzigen Schematismus, dessen Gesetzen sie gleichmäfsig unterliegen.

Beim Übergange von dem charakterisierten zu einem eindeutigen Indexsysteme kann man den Index der unendlich fernen Geraden,

da derselbe zur geometrischen Deutung des Schemas nach Theorem (1) erforderlich ist, entsprechend dem allgemeinen Index

$$J(g_h) = g_2^{(h)},\ g_3^{(h)},\ \ldots,\ g_n^{(h)}$$

in einer der Formen ansetzen

$$'J(g_\infty) = g_2^{(h)},\ g_3^{(h)},\ \ldots,\ g_i^{(h)},\ g_h,\ g_{i+1}^{(h)},\ \ldots,\ g_n^{(h)},$$
$$h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

§ 16. Gemischte Grundgebilde.

Es kann vorkommen, dass ein in der Ebene vorliegendes geometrisches Gebilde nicht durch eine Gruppe gleichartiger Elemente, durch m Punkte oder durch n Gerade, sondern durch ein aus beiden Arten, aus m Punkten und n Geraden, zusammengesetztes System definiert ist. Im Interesse der Vollständigkeit mag daher auch die Theorie der gemischten Grundgebilde

$$\sum(\mathfrak{P}_m,\ G_n) \equiv \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2, \ldots,\ \mathfrak{p}_m,\ g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n \equiv \sum_{m,n}$$

in den wesentlichsten Zügen skizziert werden.

Nach Analogie der Untersuchungen über das Punkt- und das Geradensystem sind folgende drei Hauptfragen zu entscheiden:

1) Was ist unter dem Charakter eines gemischten Gebildes $\Sigma_{m,n}$ zu verstehen?

2) Existiert ein demselben äquivalenter übersichtlicher Schematismus?

3) Welches sind die einfachsten den Charakter bestimmenden Grundbedingungen?

Als Antwort auf die erste Frage liefert die Anschauung unmittelbar die Definition:

Ein gemischtes Gebilde $\Sigma_{m,n}$ ist charakterisiert durch seine beiden für sich wohlbestimmten Bestandteile

$$\mathfrak{P}_m \text{ und } G_n$$

wie durch deren relative Lage gegeneinander, also durch die Art der Verteilung

der Punkte $\mathfrak{p}_i$ auf die Primärflächen $F_\mathfrak{p}$ des Geradensystemes G_n,	der Strahlen g_i auf die Primärscharen S_g des Punktsystemes $\mathfrak{P}_m$.

Hierbei kommen für ein heterogenes Elementepaar

$$\mathfrak{p}_i \text{ und } g_k$$

folgende fünf verschiedene Lagenbeziehungen in betracht.

1) Es gehört weder $\mathfrak{p}_i$ in G_n zu einer von g_k mitbegrenzten Primärfläche F_{g_k} noch g_k in $\mathfrak{P}_m$ zu einer von $\mathfrak{p}_i$ mitbegrenzten Primärschar $S_{\mathfrak{p}_i}$;

2) es gehört $\mathfrak{p}_i$ zwar zu einer Fläche F_{g_k}, dagegen g_k zu keiner Schar $S_{\mathfrak{p}_i}$;

3) es gehört $\mathfrak{p}_i$ zwar zu keiner Fläche F_{g_k}, wohl aber g_k zu einer Schar $S_{\mathfrak{p}_i}$;

4) es gehört sowohl $\mathfrak{p}_i$ zu einer Fläche F_{g_k} als auch g_k zu einer Schar $S_{\mathfrak{p}_i}$;

5) es befinden sich $\mathfrak{p}_i$ und g_k in vereinigter oder singulärer Lage.

Fixiert man in den beiden reciproken Elementen,

in der Punktreihe $\mathfrak{P}_{g_k}$ einen Punkt $\mathfrak{p}$,	in dem Strahlenbüschel $S_{\mathfrak{p}_i}$ einen Strahl g,

so kann man die vier Fälle allgemeiner Lage derselben auch so kennzeichnen:

1) Jede der beiden Strahlenscharen $\mathfrak{p}|_1\,\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}|_2\,\mathfrak{p}_i$ bezw. Punktflächen $g|_1\,g_k$ und $g|_2\,g_k$ enthält mindestens ein Element g_h bezw. $\mathfrak{p}_h$;

2) eine der beiden Scharen $\mathfrak{p}|_1\,\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}|_2\,\mathfrak{p}_i$ enthält keine Gerade g_h, dagegen jede der beiden Flächen $g|_1\,g_k$ und $g|_2\,g_k$ mindestens einen Punkt $\mathfrak{p}_h$;

3) eine der beiden Flächen $g|_1\,g_k$ und $g|_2\,g_k$ enthält einen Punkt $\mathfrak{p}_h$, dagegen jede der beiden Scharen $\mathfrak{p}|_1\,\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}|_2\,\mathfrak{p}_i$ mindestens eine Gerade g_h;

4) eine der beiden Scharen $\mathfrak{p}|_1\,\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}|_2\,\mathfrak{p}_i$ enthält keine Gerade g_h, desgleichen eine der beiden Flächen $g|_1\,g_k$ und $g|_2\,g_k$ keinen Punkt $\mathfrak{p}_h$.

Gemäfs diesem Zusammenhange kann eine den selbständigen Charakter der Gebilde

$$\mathfrak{P}_m \quad \text{und} \quad G_n$$

nicht ändernde stetige Bewegung des Gesamtsystemes $\Sigma_{m,n}$ ein Paar diskreter Elemente

$$\mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad g_k$$

nur dann direkt, d. h. ohne vorherigen Eintritt einer analogen Singularität in vereinigte Lage bringen, wenn dieselben der vierten obigen Bedingung genügen, wenn also ein jedes von ihnen einem durch das andere mitbegrenzten Primärbereich angehört.

Es sollen diese ausgezeichneten Paare dualer Elemente als Stammdupel des gemischten Grundgebildes $\Sigma_{m,n}$ bezeichnet werden.

Da ferner eine kontinuierliche Variation des letzteren solche Fundamentaltripel von $\mathfrak{P}_m$ und G_n, welche in ihren Primärbereichen ein oder mehrere heterogene Elemente enthalten, erst zur Inversion gelangen läfst, nachdem jedes der letzteren mindestens ein Grenzelement des Fundamentaltripels passiert hat, wird man zusammenfassend den Satz formulieren:

Der Charakter eines gemischten Grundgebildes $\Sigma_{m,n}$ bleibt bei stetigen Bewegungen seiner Elemente stets so lange und nur so lange ungeändert, als sowohl das System seiner reinen (strahlen- und punktefreien) primären Punkte- und Geradentripel der zusammensetzenden Bestandteile $\mathfrak{P}_m$ und G_n wie die Gruppe der diese verbindenden Stammdupel $\mathfrak{p}_i|g_k$ ihren Bestand bewahrt.

Man hat hiernach in dem gemischten Systeme drei Arten fundamentaler Bestimmungsstücke zu unterscheiden:

1) das primäre Punktetripel, 2) das primäre Geradentripel,
3) das Stammdupel.

Die Gesamtzahl dieser ist auch hier durch die Anzahl $m+n$ der Elemente in gewisser Weise, nämlich nach unten hin begrenzt. Zunächst erkennt man, dafs bei irgend einer Zerlegung des Systemes $\Sigma_{m,n}$ in zwei sich ausschliefsende analoge Gebilde

$$\sum_{m_1, n_1} \quad \text{und} \quad \sum_{m_2, n_2}$$

diese durch mindestens drei Stammgebilde verbunden sind. Denn vervollständigt man die Partialsysteme

$$\sum_{m_1, n_1} \equiv \mathfrak{p}_1', \ \mathfrak{p}_2', \ \ldots, \ \mathfrak{p}_{m_1}', \ g_1', \ g_2', \ \ldots, \ g_{n_1}',$$

$$\sum_{m_2, n_2} \equiv \mathfrak{p}_1'', \ \mathfrak{p}_2'', \ \ldots, \ \mathfrak{p}_{m_2}'', \ g_1'', \ g_2'', \ \ldots, \ g_{n_2}''$$

durch die Verbindungsgeraden ihrer Punkte und die Durchschnittspunkte ihrer Geraden

$$|\mathfrak{p}_i', \ \mathfrak{p}_k'| \text{ und } (g_i', \ g_k') \quad \text{bezw.} \quad |\mathfrak{p}_i'', \ \mathfrak{p}_k''| \text{ und } (g_i'', \ g_k'')$$

und berücksichtigt, dafs bei stetigen Variationen des einen als starr gedachten Gebildes Σ_{m_1, n_1} und gleichzeitiger Ruhe des anderen Σ_{m_2, n_2} sowohl die Incidenz eines Punktes $\mathfrak{p}_i'$ oder $\mathfrak{p}_i''$ in eine Gerade $|\mathfrak{p}_k'', \ \mathfrak{p}_l''|$ oder $|\mathfrak{p}_k', \ \mathfrak{p}_l'|$, als auch die Kreuzung einer Geraden g_i' oder g_i'' mit einem Durchschnitt $(g_k'', \ g_l'')$ oder $(g_k', \ g_l')$, wie endlich die Coincidenz eines Punktes $\mathfrak{p}_i'$ oder $\mathfrak{p}_i''$ mit einer Geraden g_k'' oder g_k' und nur durch eines dieser Vorkommnisse stets eine charakteristische Änderung von $\Sigma_{m,n}$ erzeugt wird, kann auf ähnliche Weise

wie in § 7 durch passende Parallelverschiebungen und Rotationen von Σ_{m_1, n_1} das successive und unabhängige Eintreten von mindestens drei der bezeichneten Singularitäten bewirkt werden.

Die Anwendung dieses Gedankenganges einerseits auf die einzelnen Elemente

$$\mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad g_k$$

andrerseits auf die getrennten Gebilde

$$\mathfrak{P}_m \quad \text{und} \quad G_n$$

ergiebt, dafs das einzelne Element mindestens drei Stammgebilden angehört, und dafs zwischen den reciproken Grundgebilden mindestens drei sie verbindende Stammdupel existieren. Indem daher die Anzahlen der in $\Sigma_{m,n}$ vorhandenen primären Punktetripel, Geradentripel und Stammdupel bezeichnet werden durch resp.

$$x_3, \quad y_3 \quad \text{und} \quad z_2,$$

resultieren die Relationen:

1. $3x_3 + 3y_3 + 2z_2 \geqq 3(m+n)$,
2. $z_2 \geqq 3$,

und hieraus die weitere:

3. $x_3 + y_3 + z_2 \geqq m + n + 1$.

Falls überhaupt nur Stammdupel vorhanden, erhält man die Bedingung:

4. $z_2 \geqq \frac{3}{2}(m+n)$.

Die bisherige Darstellung nimmt lediglich auf den projektiven Charakter des gemischten Systemes $\Sigma_{m,n}$ Rücksicht. Durch die Wahl eines Punktes $\mathfrak{p}_1$ von $\mathfrak{P}_m$ zum Grenzpole tritt auch die Lage des Gebildes zur unendlich fernen Geraden g_∞ in Evidenz. In diesem engeren Sinne ist dann der Charakter von $\Sigma_{m,n}$ definiert durch den Verein der eindeutig bestimmten Charakteristiken

$$1.\ c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l), \quad 2.\ c(g_i, g_k, g_l), \quad 3.\ c(\mathfrak{p}_i, g_k),$$

wo die Charakteristik eines reciproken Paares

$$\mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad g_k$$

entsprechend der durch den Grenzpol auf g_k fixierten positiven und negativen Bewegungsrichtungen gegeben ist durch

$$c(\mathfrak{p}_i, g_k) = +1 \quad \text{oder} \quad c(\mathfrak{p}_i, g_k) = -1,$$

je nachdem $\mathfrak{p}_i$ zur Linken oder zur Rechten von g_k gelegen ist,

während die vereinigte Lage beider Elemente ausgedrückt wird durch die Beziehung

$$c(\mathfrak{p}_i, g_k) = 0.$$

Speziell ist daher die Charakteristik eines Dupels $\mathfrak{p}_i$, g_k bei allgemeiner Lage stets $+1$, bei singulärer 0.

Hiermit ist die erste der aufgestellten drei Hauptfragen im wesentlichen erledigt.

Was die an zweiter Stelle geforderte Angabe eines Indexsystemes für $\Sigma_{m,n}$ anlangt, bestehen zuvörderst nach wie vor die Partialschemata:

I) $'J(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3', \ldots, \mathfrak{p}_m',$	$\bar{\text{I}}) \; 'J(g_1) = g_2', g_3', \ldots, g_n',$
$'J(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'', \ldots, \mathfrak{p}_m'',$	$'J(g_2) = g_2'', g_3'', \ldots, g_n'',$
. . . . . ;	. . . . . ;
$'J(\mathfrak{p}_m) = \mathfrak{p}_2^{(m)}, \mathfrak{p}_3^{(m)}, \ldots, \mathfrak{p}_m^{(m)};$	$'J(g_n) = g_2^{(n)}, g_3^{(n)}, \ldots, g_n^{(n)}.$

Es wird sich darum handeln, in dieses kombinierte Schema noch die Lagenbeziehungen der reziproken Gebilde $\mathfrak{P}_m$ und G_n zu einander aufzunehmen.

Eine Gerade g_i ist Innenstrahl einer bestimmten Primärschar S_{g_i} von $\mathfrak{P}_m$ und ist als solcher ausgezeichnet durch die Aufeinanderfolge der diese begrenzenden Ecken, welche gemäfs den beiden Möglichkeiten

$$c(g_i, \mathfrak{p}_{i_h'}) = +1 \text{ und } c(g_i, \mathfrak{q}_{i_h'}) = -1$$

sich als positiver und negativer Zug

$\mathfrak{p}_{i_1'}, \mathfrak{p}_{i_2'}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_{\lambda_1}'}$*) und $\mathfrak{q}_{i_1'}, \mathfrak{q}_{i_2'}, \ldots, \mathfrak{q}_{i_{\lambda_2}'}$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 3, 4, 5, \ldots, n$$

zu beiden Seiten der Geraden anordnen.

Ein Punkt $\mathfrak{p}_i$ ist Innenpunkt einer bestimmten Primärfläche $F_{\mathfrak{p}_i}$ von G_n und ist als solcher ausgezeichnet durch die Aufeinanderfolge der diese begrenzenden Seiten, welche gemäfs den beiden Möglichkeiten

$$c(\mathfrak{p}_i, g_{i_h'}) = +1 \text{ und } c(\mathfrak{p}_i, q_{i_h'}) = -1$$

sich als positiver und negativer Zug

$g_{i_1'}, g_{i_2'}, \ldots, g_{i_{\lambda_1}'}$ und $q_{i_1'}, q_{i_2'}, \ldots, q_{i_{\lambda_2}'}$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 3, 4, 5, \ldots, n$$

zu beiden Seiten des Punktes anordnen.

Im Falle eines allgemeinen Systemes $\Sigma_{m,n}$ dient daher zur eindeutigen Definition des Index

*) Die Bezeichnungsweise der Grenzecken von S_{g_i} bezw. der Grenzseiten von $F_{\mathfrak{p}_i}$ ist so gewählt, dafs ein die Strecke

$$\mathfrak{p}_{i_1'} \text{——} \mathfrak{p}_{i_2'} \quad \text{bezw.} \quad (q_{i_{\lambda_2}'}, g_{i_1'}) \text{——} (g_{i_1'}, g_{i_2'})$$

abschreitender Beobachter den Pol $\mathfrak{p}_i$ zur Linken liegen hat.

einer Geraden g_i in bezug auf die Punktgruppe $\mathfrak{P}_m$
die symbolische Gleichung:

$$'J(g_i) = \mathfrak{p}_{i_1'}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_{\lambda_1}'}, | \mathfrak{q}_{i_1'}, \ldots, \mathfrak{q}_{i_{\lambda_2}'};$$

Enthält im besonderen die Punktreihe g_i Punkte von $\mathfrak{P}_m$ und zwar in der positiven Folge

$$\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\varrho,$$

eines Punktes $\mathfrak{p}_i$ in bezug auf den Geradenkomplex G_n

$$'J(\mathfrak{p}_i) = g_{i_1'}, \ldots, g_{i_{\lambda_1}'}, | q_{i_1'}, \ldots, q_{i_{\lambda_2}'}.$$

Enthält im besonderen das Strahlenbüschel $\mathfrak{p}_i$ Geraden von G_n und zwar in der positiven Folge

$$r_1, r_2, \ldots, r_\varrho,$$

so sind dieselben zum Unterschied von den übrigen Elementen des Index eingeklammert in diesen einzureihen. Dabei bestimmen sich die Stellungen der einzelnen Elemente

durch die Eckenfolgen der beiden Primärvielecke

$$\frac{\mathfrak{p}_{i_a'}, \mathfrak{p}_{i_{a+1}'}, \ldots, \mathfrak{r}_h, \mathfrak{r}_{h+1}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_b'},}{\mathfrak{q}_{i_{a_1}'}, \mathfrak{q}_{i_{a_1+1}'}, \ldots, \mathfrak{q}_{i_{b_1}'}}$$

und

$$\frac{\mathfrak{p}_{i_a'}, \mathfrak{p}_{i_{a+1}'}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_b'},}{\mathfrak{q}_{i_{a_1}'}, \mathfrak{q}_{i_{a_1+1}'}, \ldots, \mathfrak{r}_h, \mathfrak{r}_{h+1}, \ldots, \mathfrak{q}_{i_{b_1}'}}$$

des partiellen Systemes

$$\mathfrak{p}_{i_1'}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_{\lambda_1}'}, \mathfrak{q}_{i_1'}, \ldots, \mathfrak{q}_{i_{\lambda_2}'}, \mathfrak{r}_h, \mathfrak{r}_{h+1};$$

durch die Seitenfolgen der beiden Primärflächen

$$\frac{g_{i_a'}, g_{i_{a+1}'}, \ldots, r_h, r_{h+1}, \ldots, g_{i_b'},}{q_{i_{a_1}'}, q_{i_{a_1+1}'}, \ldots, q_{i_{b_1}'}}$$

und

$$\frac{g_{i_a'}, g_{i_{a+1}'}, \ldots, g_{i_b'}}{q_{i_{a_1}'}, q_{i_{a_1+1}'}, \ldots, r_h, r_{h+1}, \ldots, q_{i_{b_1}'}}$$

$$g_{i_1'}, \ldots, g_{i_{\lambda_1}'}, q_{i_1'}, \ldots, q_{i_{\lambda_2}'}, r_h, r_{h+1}.$$

Wenn beispielsweise der Punkt $\mathfrak{p}_i$ als Durchschnitt zweier Geraden g_7, g_8 rücksichtlich der übrigen Elemente von G_n einer Primärfläche mit den sechs in positivem Sinne aufeinanderfolgenden Seiten angehört

$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6,$$

von denen die beiden Paare

$$g_1, g_4 \quad \text{und} \quad g_2, g_5$$

getroffen werden von resp.

$$g_7 \quad \text{und} \quad g_8,$$

— auf die Lage des Grenzpoles $\mathfrak{p}_1$ kommt es hierbei nicht weiter an — so stellt sich der Index $'J(\mathfrak{p}_i)$ in der Form dar:

$$'J(\mathfrak{p}_i) = (g_7), g_1, g_2, (g_8), g_2, g_3, g_4, (g_7), g_4, g_5, (g_8), g_5, g_6, g_1, (g_7).$$

Unter Beschränkung auf ein allgemeines gemischtes System $\Sigma_{m,n}$ hat man hiernach zur Repräsentation seines Indexsystemes neben den beiden reinen Schematen I und $\bar{\text{I}}$ noch die gemischten:

$$\text{I}_1)\ {}'J(g_i) = \mathfrak{p}_{i_1'}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_{\lambda_1}'} \mid \mathfrak{q}_{i_1'}, \ldots, \mathfrak{q}_{i_{\lambda_2}'} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\bar{\text{I}}_1)\ {}'J(\mathfrak{p}_i) = g_{i_1'}, \ldots, g_{i_{\lambda_1}'} \mid q_{i_1'}, \ldots, q_{i_{\lambda_2}'} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Die angegebenen vier Schemata sind nicht unabhängig von einander. Es gilt vielmehr der Satz:

Der Charakter eines gemischten Gebildes ist bereits durch seine beiden Hauptschemata und ein gemischtes vollkommen und unzweideutig definiert.

Die Annahme der drei Systeme I, I und I_1 — es genügt, diesen Fall zu betrachten — führt zufolge der beiden ersteren auf die Charakteristiken:

$$c(g_i, g_k, g_l) = \pm 1 \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l) = \pm 1,$$

während der Index

$${}'J(g_i) = \mathfrak{p}_{i_1'}, \mathfrak{p}_{i_2'}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_{\lambda_1}'} \mid \mathfrak{q}_{i_1'}, \mathfrak{q}_{i_2'}, \ldots, \mathfrak{q}_{i_{\lambda_2}'}$$

gemäfs seiner Form die anderen bedingt:

$$c(g_i, \mathfrak{p}_{i_h'}) = +1 \quad \text{und} \quad c(g_i, \mathfrak{q}_{i_h'}) = -1.$$

Kombiniert man je zwei derselben

$$1)\ c(g_i, \mathfrak{p}_k^{(i)}) = +1 \text{ u. } c(g_i, \mathfrak{p}_l^{(i)}) = +1 \quad (k < l) \qquad 2)\ c(g_i, \mathfrak{q}_k^{(i)}) = -1 \text{ u. } c(g_i, \mathfrak{q}_l^{(i)}) = -1 \quad (k < l)$$

mit den bereits bekannten

a) $c(\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_h) = +1,$	a) $c(\mathfrak{q}_k, \mathfrak{q}_l, \mathfrak{p}_h) = +1,$
b) $c(\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l, \mathfrak{p}_h) = -1,$	b) $c(\mathfrak{q}_k, \mathfrak{q}_l, \mathfrak{p}_h) = -1,$

(es gehört $\mathfrak{p}_h$ nicht zu den Ecken der Primärschar S_{g_i})

so erhält man:

1a) $c(g_i, \mathfrak{p}_h) = +1,$	2a) $c(g_i, \mathfrak{p}_h) = +1,$
1b) $c(g_i, \mathfrak{p}_h) = -1;$	2b) $c(g_i, \mathfrak{p}_h) = -1.$

Durch die gegebenen drei Schemata ist also die Lage jeder Geraden g_i zu jedem Punkte $\mathfrak{p}_h$ oder die Lage des Systemes G_n zu dem anderen $\mathfrak{P}_m$ vollkommen bestimmt.

Um jetzt, was nach dieser Folgerung notwendig ausführbar ist, den unbekannten Index eines Punktes $\mathfrak{p}_i$ in bezug auf das Gebilde G_n abzuleiten, suche man zunächst denjenigen des Grenzpoles $\mathfrak{p}_1$ zu ermitteln. Hierzu vergleiche man den Index

$${}'J(g_\infty) = g_i, g_k, g_l$$

mit den drei anderen

$${}'J(g_i), \quad {}'J(g_k), \quad {}'J(g_l).$$

Aus den Formen letzterer läfst sich auf Grund der Ausführungen des vorigen Paragraphen zunächst die Fläche des Grenzpoles feststellen. Dieselbe sei der einfacheren Vorstellung halber gefunden in dem endlichen Dreiseit

$$\triangle(g_i, g_k, g_l).$$

Wenn dieses eine Primärfläche von G_n darstellt, wird der gesuchte Index gegeben durch:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = g_i, g_l, g_k.$$

Im gegenteiligen Falle müssen zwei Indices des Geradentripels

$'J(g_i) = g_k, \ldots, g_l, \ldots, g_\infty$ und $'J(g_k) = g_l, \ldots, g_i, \ldots, g_\infty$

zwischen den Elementepaaren

$$g_k, g_l \text{ und } g_l, g_i$$

mindestens ein und dasselbe Element g_m aufweisen. Je nachdem dann der Index besteht

$'J(g_m) = g_i, \ldots, g_k, \ldots, g_\infty$ oder $'J(g_m) = g_k, \ldots, g_i, \ldots, g_\infty$

hat man für $\mathfrak{p}_1$ den vorläufigen Index anzusetzen:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = g_i, g_m, g_k \text{ oder } 'J(\mathfrak{p}_1) = g_i, g_l, g_k, g_m.$$

Falls in dem allgemeineren zweiten Falle die vier Geraden

$$g_i, g_k, g_l, g_m$$

keine Primärfläche von G_n einschliefsen, was nach § 4 aus dem Schema I leicht zu ersehen ist, müssen in zwei zugehörigen Indices

1) $'J(g_i) = g_m, \ldots, g_l, \ldots, g_\infty$ und $'J(g_l) = g_i, \ldots, g_k, \ldots, g_\infty$,

2) $'J(g_i) = g_m, \ldots, g_l, \ldots, g_\infty$ und $'J(g_k) = g_l, \ldots, g_m, \ldots, g_\infty$

die Elementepaare

1) g_m, g_l und g_i, g_k 2) g_m, g_l und g_l, g_m

durch ein und dasselbe fünfte Element g_r getrennt sein. Entsprechend den alsdann möglichen 2 . 2 Annahmen

1a) $'J(g_r) = g_i, g_l, g_\infty$ 1b) $'J(g_r) = g_l, g_i, g_\infty$

bezw.

2a) $'J(g_r) = g_i, g_k, g_\infty$ 2b) $'J(g_r) = g_k, g_i, g_\infty$

resultiert der vorläufige Index:

1a) $'J(\mathfrak{p}_1) = g_i, g_r, g_l, g_k, g_m,$ 1b) $'J(\mathfrak{p}_1) = g_i, g_l, g_r,$

2a) $'J(\mathfrak{p}_1) = g_i, g_r, g_k, g_m,$ 2b) $'J(\mathfrak{p}_1) = g_i, g_l, g_k, g_r.$

Indem man diese Schlufsweise weit genug fortsetzt, findet man endgültig die Form:

$$'J(\mathfrak{p}_1) = g_i, \ldots, g_t, g_s, g_r, g_l, g_k, g_m.$$

Behufs des Überganges von diesem zu dem Index eines beliebigen Punktes $\mathfrak{p}_i$ dient die Gegenüberstellung der bereits bekannten Charakteristiken

$$c(\mathfrak{p}_1, g_h) \quad \text{und} \quad c(\mathfrak{p}_i, g_h)$$
$$h = 1, 2, \ldots, n.$$

Es liefern nämlich alle entgegengesetzten Paare die sämtlichen Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_\lambda$, welche die beiden Punkte von einander trennen, d. h. ihre endliche Verbindungsstrecke schneiden. Eine derselben, etwa g_1, mufs Seite der Primärfläche $F(\mathfrak{p}_1)$ und folglich auch einer anliegenden zweiten $F(\mathfrak{q}_1)$ sein, deren Seitenfolge oder Index $'J(\mathfrak{q}_1)$ nach § 4 aus dem Schema unschwer abgelesen wird. Da die Strecke $\mathfrak{p}_1 \text{---} \mathfrak{q}_1$ durch die einzige Gerade g_1, die andere $\mathfrak{p}_1 \text{---} \mathfrak{p}_i$ durch alle λ Geraden g_h getroffen wird, kann die Strecke $\mathfrak{q}_1 \text{---} \mathfrak{p}_i$ als dritte Seite einer Dreiecksfläche nur noch von den $\lambda - 1$ Geraden geschnitten werden

$$g_2, g_3, \ldots, g_\lambda.$$

Unter diesen mufs wiederum eine, etwa die Gerade g_2, gemeinsame Seite der Primärfläche $F(\mathfrak{q}_1)$ und einer zweiten $F(\mathfrak{q}_2)$ sein. Da alsdann die Strecke $\mathfrak{q}_1 \text{---} \mathfrak{q}_2$ von der einzigen Geraden g_2, die andere $\mathfrak{q}_2 \text{---} \mathfrak{p}_i$ aufser von dieser noch von $\lambda - 2$ Geraden g_h geschnitten wird, begegnen der dritten Strecke $\mathfrak{q}_2 \text{---} \mathfrak{p}_i$ nur noch die letzteren

$$g_3, g_4, \ldots, g_\lambda.$$

Man gelangt so aus der Primärfläche $F(\mathfrak{p}_1)$ zu einer Reihe sich paarweise in je einer Geraden

$$g_1, g_2, \ldots, g_\lambda$$

seitenden Primärflächen

$$F(\mathfrak{q}_1), F(\mathfrak{q}_2), \ldots, F(\mathfrak{q}_\lambda).$$

Weil aber die Strecke $\mathfrak{q}_\lambda \text{---} \mathfrak{p}_i$ von keiner Geraden g_h geschnitten wird, ist die letzte Fläche der Reihe mit $F(\mathfrak{p}_i)$ identisch, und weil ihre Seitenfolge aus dem Schema I bekannt, ist hiermit der Index des Punktes $\mathfrak{p}_i$ bestimmt.

Engere Abhängigkeiten, ähnlich den durch das Theorem (6) bezüglich der reinen Schemata I und $\bar{\text{I}}$ ausgesprochenen, existieren innerhalb der gemischten I_1 und $\bar{\text{I}}_1$ nicht. — Denn wenn bei stetiger Bewegung des Systemes $\Sigma_{m,n}$ ohne vorherige Inversion eines Fundamentaltripels

$$g_i, g_k, g_l \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l$$

ein erstes Paar reziproker Elemente

g_i und $\mathfrak{p}_k$

mittelst gegenseitigen Durchganges seine allgemeine Lage wechselt,

wenn also die Gerade g_i aus ihrem ursprünglichen Primärbereich S_{g_i} von $\mathfrak{P}_m$ in einen benachbarten übertritt,	wenn also der Punkt $\mathfrak{p}_k$ aus seiner ursprünglichen Primärfläche $F_{\mathfrak{p}_k}$ von G_n in eine Seitenfläche übergeht,

ändern sich in den gemischten Schematen einzig und allein die Indices

$$'J(g_i) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_k).$$

Man schliefst hieraus zugleich das umkehrbare Kriterium:
Weisen in den gemischten Schematen zwei Indices

$$'J(g_i) \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_k)$$

resp. die Elemente auf

$$\mathfrak{p}_k \quad \text{und} \quad g_i,$$

so bestimmen letztere allemal ein Stammdupel.

Weit umständlicher gestaltet sich die Entscheidung darüber, ob ein nach den Hauptschematen I und $\bar{\text{I}}$ sich als primär darstellendes Tripel

$$g_i,\ g_k,\ g_l \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

auch Fundamentaltripel des kombinierten Systemes $\Sigma_{m,n}$ ist. Man hat zu dem Ende die drei Charakteristiken festzustellen

$c(g_i, \mathfrak{p}_0)$, $c(g_k, \mathfrak{p}_0)$, $c(g_l, \mathfrak{p}_0)$ bezw. $c(\mathfrak{p}_i, g_0)$, $c(\mathfrak{p}_k, g_0)$, $c(\mathfrak{p}_l, g_0)$,

welche einem im Bereiche des Tripels fingierten reziproken Elemente zukommen, und darauf mit dieser die den einzelnen Elementen von

$$\mathfrak{P}_m \quad \text{bezw.} \quad G_n$$

zugeordneten entsprechenden Zeichenfolgen successive zu vergleichen. Nur wenn sich letztere durchgängig als von jener verschieden erweisen, ist das Tripel ein primäres.

Die Beantwortung der dritten und letzten Hauptfrage nach der Bestimmbarkeit des gemischten Systemes aus seinen einfachsten Stammformen, bei den einartigen Grundgebilden bereits schwierig, gestaltet sich infolge der verwickelten Bedingungen der primären Elementetripel zu einer Aufgabe, deren allgemeine Lösung bei der relativen Bedeutungslosigkeit des zusammengesetzten Gebildes über das hier verfolgte Ziel hinausgeht.

Ein besonderes Interesse bieten noch diejenigen Systeme $\Sigma_{m,n}$, deren Charakter ausschliefslich von der gegenseitigen Lage ihrer Bestandteile $\mathfrak{P}_m$ und G_n abhängt. Hierzu ist es notwendig und

hinreichend, dafs das betrachtete System weder ein primäres Punkt- noch ein primäres Geradentripel enthält, dafs also seine sämtlichen Stammformen durch Stammdupel dargestellt werden.

Da nach dieser Grundhypothese jedes Primärdreiseit von G_n mindestens einen Punkt von $\mathfrak{P}_m$, und jedes Primärdreieck von $\mathfrak{P}_m$ mindestens eine Gerade von G_n enthält, da ferner nach der Definition eines Primärbereiches in dem einen wie in dem anderen Gebilde keine zwei sich in einem analogen dritten Bereich überdecken, resultieren, wenn die Anzahlen der primären Dreiseite und Dreiecke in G_n und $\mathfrak{P}_m$ mit resp. x_3 und y_3 bezeichnet werden, die Beziehungen:

$$1)\quad x_3 \gtreqless m \quad \text{und} \quad y_3 \gtreqless n.$$

Es gelten aber nach einem bekannten Satze auch die anderen:

$$2)\quad x_3 \gtrless n \quad \text{und} \quad y_3 \gtrless m.$$

In Verbindung mit ersteren ergeben dieselben die dritten:

$$3)\quad x_3 \leqq m \leqq y_3 \quad \text{und} \quad y_3 \leqq n \leqq x_3,$$

also folgt schliefslich:

$$4)\quad x_3 = y_3 = m = n.$$

Man erhält mithin den Satz:

Wenn in einem gemischten Systeme $\Sigma_{m,n}$ weder primäre Punkte- noch Geradentripel vorkommen, besteht dasselbe aus ebenso vielen Geraden als Punkten, und zwar liegt jede Gerade in dem Bereiche eines Primärdreiecks, jeder Punkt im Innern eines Primärdreiseits.

Eine sich unmittelbar darbietende weitere Eigenschaft jedes solchen Systemes besteht darin, dafs alle Paare reziproker Elemente

$$g_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_k,$$

welche den resp. Indices angehören

$$'J(\mathfrak{p}_k) \quad \text{und} \quad 'J(g_i),$$

ebenso viele Stammdupel bestimmen.

Denn gehört $\mathfrak{p}_k$ zu der Primärschar S_{g_i} von $\mathfrak{P}_m$, während g_i nicht zugleich Seite der Primärfläche $F_{\mathfrak{p}_k}$ von G_n ist, so müssen in letztgenanntem Gebilde zwei Geraden existieren

$$g_{h_1} \quad \text{und} \quad g_{h_2},$$

welche den Punkt $\mathfrak{p}_k$ von der Geraden g_i trennen. Diese Bedingung zerfällt in die beiden anderen, dafs einerseits eines der durch die drei Geraden begrenzten vier Dreiseite ganz dem Gebiete der Primärschar S_{g_i} angehört, andrerseits der Punkt $\mathfrak{p}_k$ in derjenigen Scheitelfläche des ersteren enthalten ist, welche der Seite g_i gegenüberliegt.

Nun stellt entweder das fragliche Dreiseit $\triangle(g_i, g_{h_1}, g_{h_2})$ selbst oder eine der es zusammensetzenden Primärflächen von G_n ein Primärdreiseit dar. Es folgt dies aus der Thatsache, dafs ein Dreiseit durch eine vierte Gerade entweder überhaupt nicht oder wieder in ein Drei- und ein Vierseit zerschnitten wird, und es mithin genügt, von den drei Geraden g_i, g_{h_1}, g_{h_2} aus durch die successive Einführung der $n-3$ übrigen zu dem Gebilde G_n fortzuschreiten, um die Richtigkeit der Behauptung einzusehen.

Nach der Grundhypothese über das System $\Sigma_{m,m}$ enthält aber jedes Primärdreiseit von G_n einen Punkt von $\mathfrak{P}_m$. Ein solcher liegt deshalb in dem einen wie in dem anderen Falle notwendig auch innerhalb des Dreiseites $\triangle(g_i, g_{h_1}, g_{h_2})$. Dieser Schlufs widerspricht aber der Annahme, dafs letzteres ganz in dem Gebiete der Primärschar S_{g_i} liegt, bezw. der gleichwertigen, dafs g_i nicht Grenzseite der Primärfläche $F_{\mathfrak{p}_k}$ einer Ecke $\mathfrak{p}_k$ des Primärvielecks S_{g_i} ist.

Man hat hiernach stets die coexistierenden Indices

$$'J(g_i) = \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l \quad \text{und} \quad 'J(\mathfrak{p}_i) = g_i, g_k, g_l,$$

und es bildet jede Gerade und jeder Punkt mit den Punkten und Geraden ihrer Indices je drei Stammdupel.

Berichtigungen.

pag. 6. Z. 10 v. u:

$$+ S_i, - S_i; + S_k, - S_k; + S_l, - S_l.$$

pag. 12. Z. 4 v. u: Indem man dann unter den $n-k$ Punkten

$$\mathfrak{p}_{k+1}, \mathfrak{p}_{k+2}, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

nach Ausschluſs aller etwaigen Durchschnitte zweier Verbindungsgeraden der Gruppe $\mathfrak{P}_k$ einen restierenden Punkt $\mathfrak{p}_{k+1}$ ihr adjungiert, darauf nach Ausscheidung jedes etwaigen Durchschnittes eines Sekantenpaares der so entstandenen Gruppe $\mathfrak{P}_{k+1}$ einen noch übrigen Punkt $\mathfrak{p}_{k+2}$ mit letzterer vereinigt und diese Bestimmungsweise bis zur Absorption aller Punkte von $\mathfrak{P}_n$ fortsetzt, wird man wieder zu einem Fundamentalsysteme gelangen.

pag. 15. Z. 2 v. u:

$$(n - 1 + r - \sum_{i=1}^{r} m_i).\ m_1!\ m_2! \ldots m_r!$$

pag. 32. Z. 13 v. o.: Für die Worte „von Zeichenwechseln statthaft“ sind die anderen „negativer Vorzeichen vorhanden“ zu setzen. Betreffs Ableitung der Zeichenregel vgl. die Anmerkung zu pag. 127 f.

pag. 42. Zwischen den Zeilen 7 und 8 v. o. einzuschalten:

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}_{i+2}) = + 1.$$

pag. 47. Auf Zeile 18 v. u. sind die Drehungsrichtungen der Indices umzukehren. Ein wesentlicher Unterschied zwischen diesem dritten und dem zweiten Schema findet nicht statt.

pag. 64. Z. 23 v. o.:

$$\frac{a_m}{b_{\beta_{m-1}+h_m}}, \frac{a_{m-1}}{b_{\beta_{m-2}+h_{m-1}}}, \ldots, \frac{a_2}{b_{\beta_1+h_2}}, \frac{a_1}{b_{h_1}},$$

$$h_i = 1, 2, \ldots, n - m - \beta_{i-1}.$$

pag. 97. Z. 12 v. u.: Statt des Schlufssatzes „folgt aber die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung“ der andere: „folgt die Identität des obigen Schemas mit dem gesamten Punktsysteme“.

pag. 108. Z. 10 v. u.:

$$\mathfrak{p}_1 \mid \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_4; \mathfrak{p}_2 \mid \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_6; \mathfrak{p}_5 \mid \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2; \mathfrak{p}\infty \mid \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3.$$

Hierbei ist das positiv konvexe Viereck

$$\mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \mathfrak{p}_6$$

zur Linken der Geraden $\mathfrak{p}_1$ —— $\mathfrak{p}_2$ angenommen.

pag. 126. Z. 14 v. u.:

$$\mathfrak{p}_m,\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i;\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k;\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l;\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_m;\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_m,\ \mathfrak{p}_1.$$

pag. 180. Z. 12 v. u.:

„Denn dadurch, dafs in einem von dem singulären unendlich wenig verschiedenen allgemeinen Systeme ...“.

pag. 180.

§ 11. Die Inäquivalenz äquivalenter aber allothetischer Punktgruppen in den Systemen ihrer Fundamentaltripel. Erweiterte geometrisch deutige Indexsysteme und ihre Elementartransformationen in einander.

pag. 183. Z. 4 v. o.:

$$\varkappa_h = \varkappa_{n+1-h}.$$

pag. 198. Z. 14 v. u.: Der Satz gilt nur unter der Einschränkung, dafs das zweite von $\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$ verschiedene Fundamentaltripel höchstens zwei Elemente der zur Inversion gelangenden Tripel aufweist.

pag. 199. Die betreffs der Elementengruppe

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_{m'}$$

unterschiedenen drei Schemata entsprechen den Annahmen eines Punktes $\mathfrak{p}_{m'}$ in resp. den durch die drei anderen bestimmten Flächen

$$1.\ \mathfrak{p}_l\,|\,\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k\,|-\Delta(\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l),\quad 2.\ \mathfrak{p}_k\,|\,\mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i\,|-\Delta(\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l),$$

$$3.\ \Delta(\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l).$$

Das vierte durch die Wahl des Punktes $\mathfrak{p}_{m'}$ in dem Gebiete $\mathfrak{p}_i\,|\,\mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l\,|-\Delta$ bedingte Schema

$$4.\ {}'J(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_{m'},\quad {}'J(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_{m'},\quad {}'J(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_{m'},\ \mathfrak{p}_k,$$

$$\text{a)}\ {}'J(\mathfrak{p}_{m'}) = \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_k,\quad \text{b)}\ {}'J(\mathfrak{p}_{m'}) = \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l$$

fällt im Wesentlichen mit (1) zusammen und konnte deshalb übergangen werden. In der That stehen den im ersten Falle positiv elliptischen Punktefolgen

$$\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_m \quad\text{und}\quad \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_{m'}$$

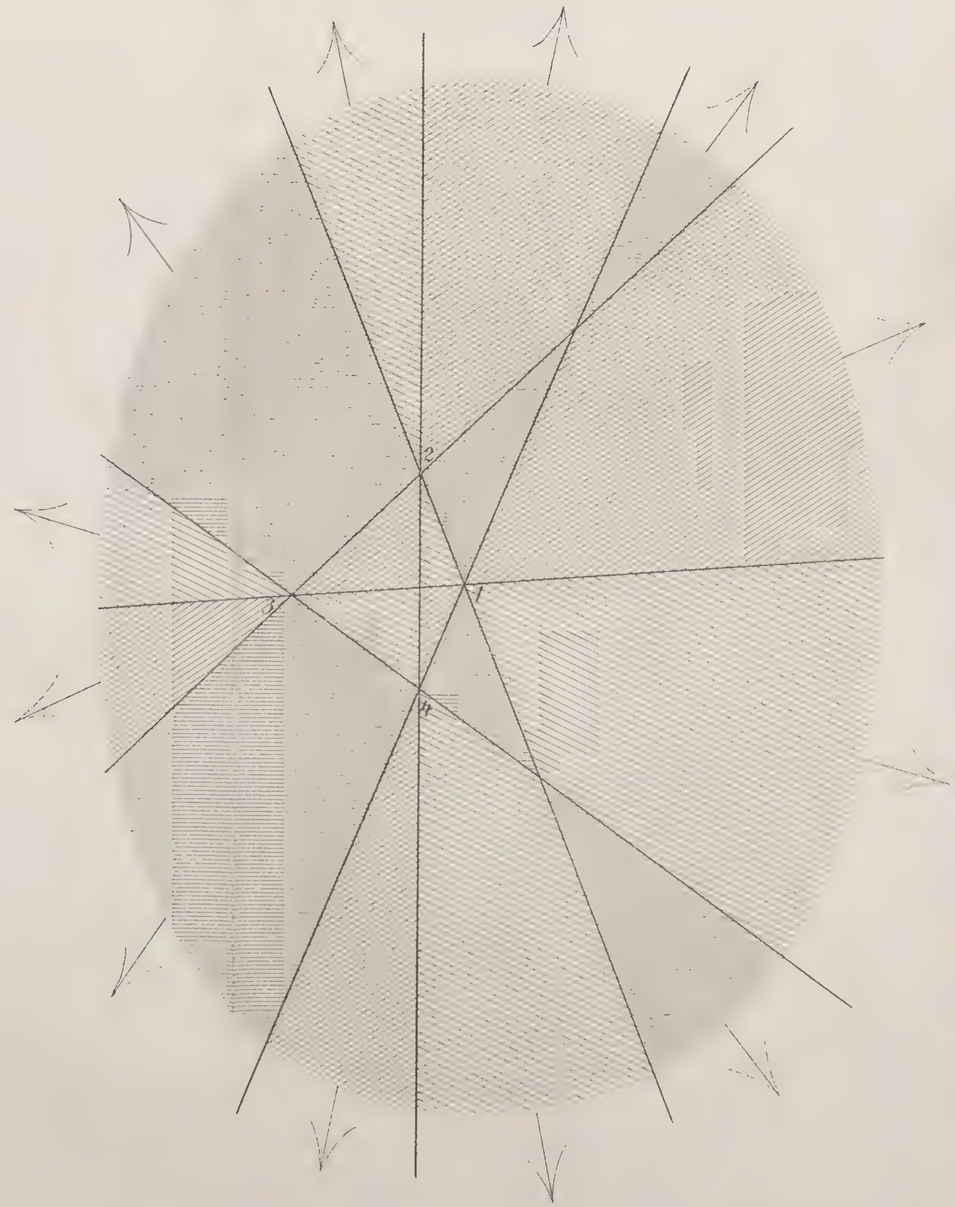
im Falle (4a) die negativ elliptischen gegenüber;

$$\mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_m \quad\text{und}\quad \mathfrak{p}_l,\ \mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{p}_k,\ \mathfrak{p}_{m'}.$$

pag. 206. Z. 18 v. u.: „von den Fundamentaltripeln des Elementes $\mathfrak{p}_1$ höchstens je ein Element enthalten, dieselben also völlig unberührt lassen.“

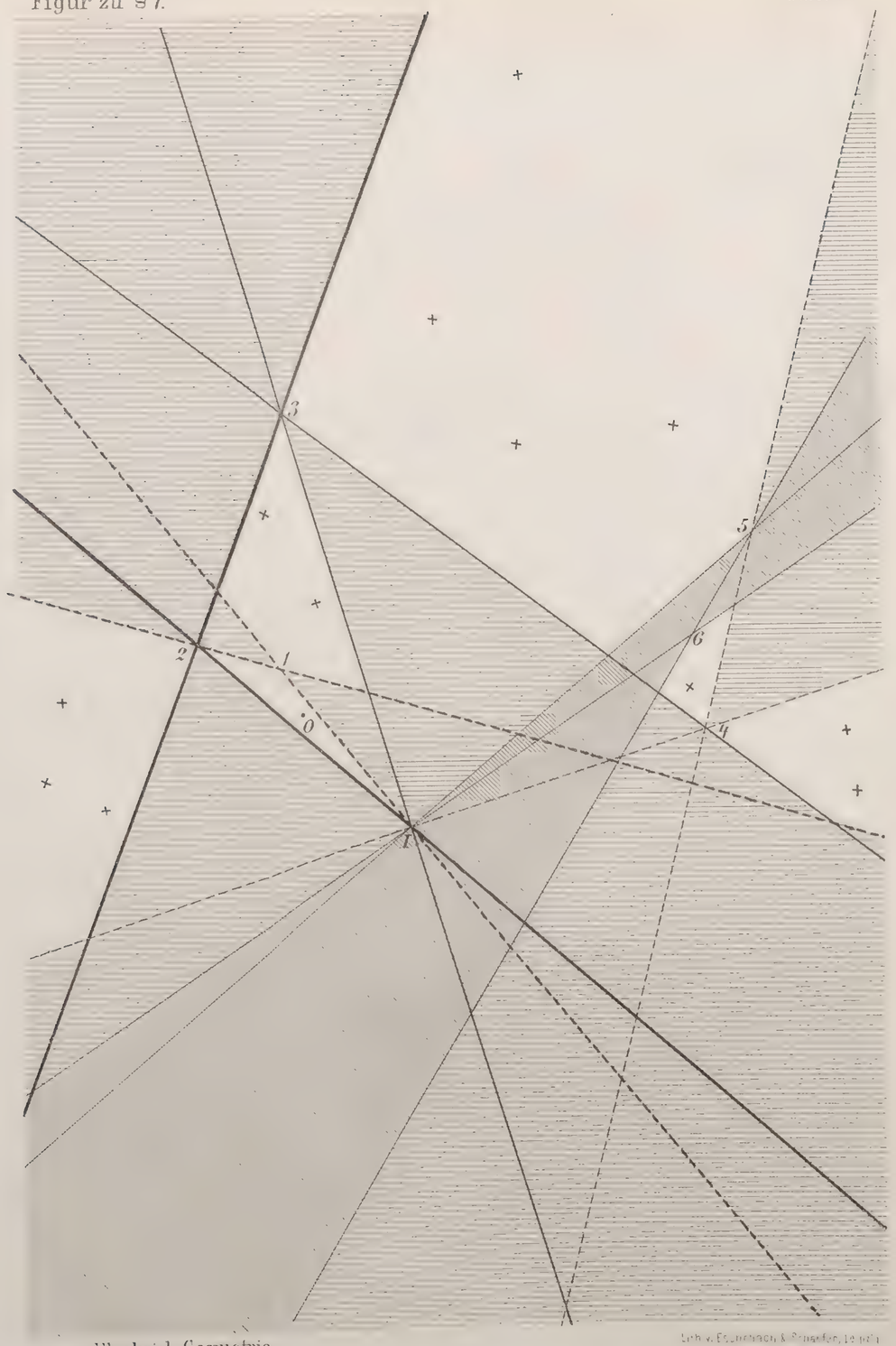
Bayerische Staats-Bibliothek München

Figur zu § 5. Tafel I.



Figur zu § 7.

Tafel II.

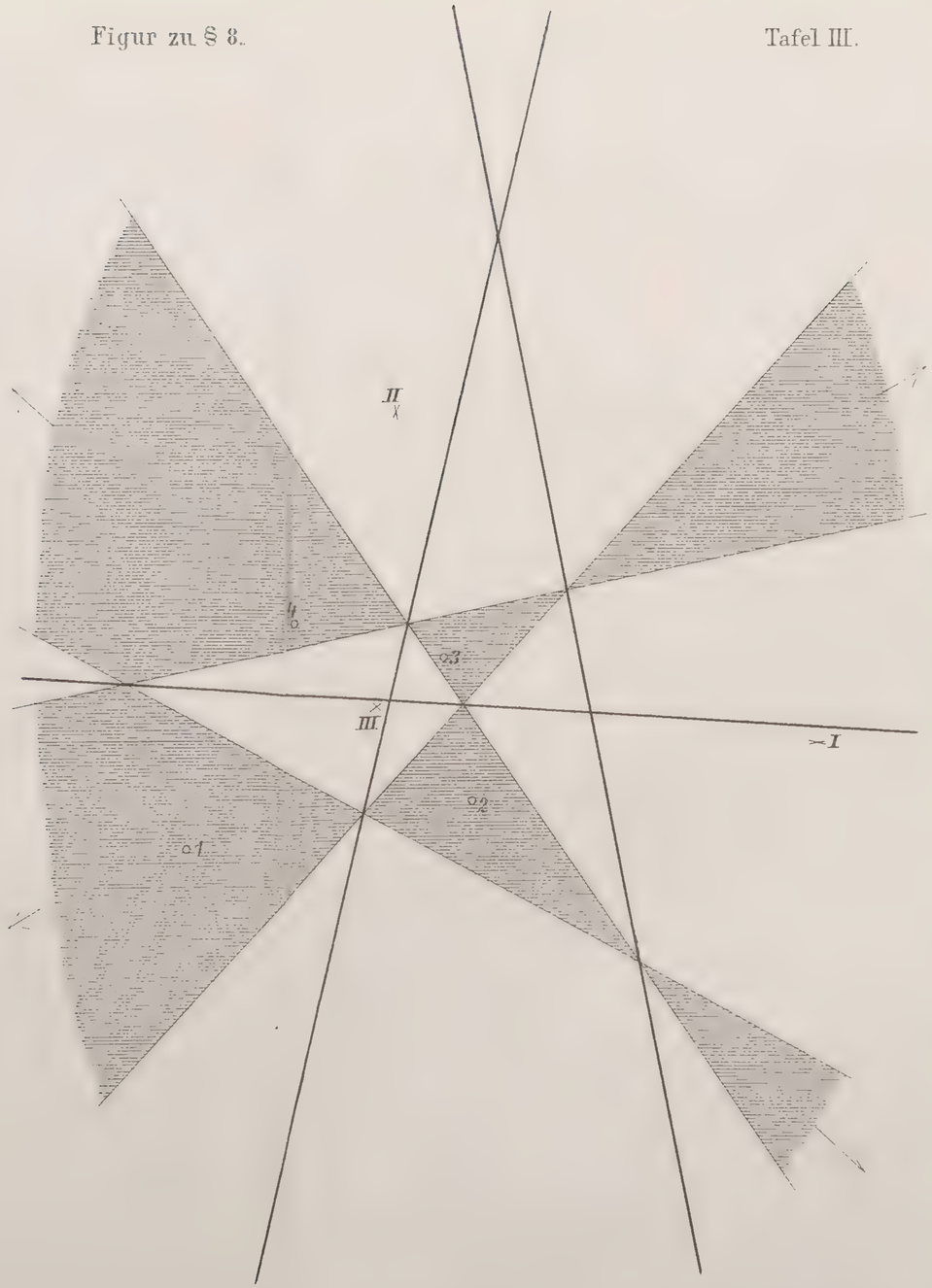


Eberhard, Geometrie.

Lith. v. Eschenbach & Schaefer, Leipzig

Figur zu § 8.

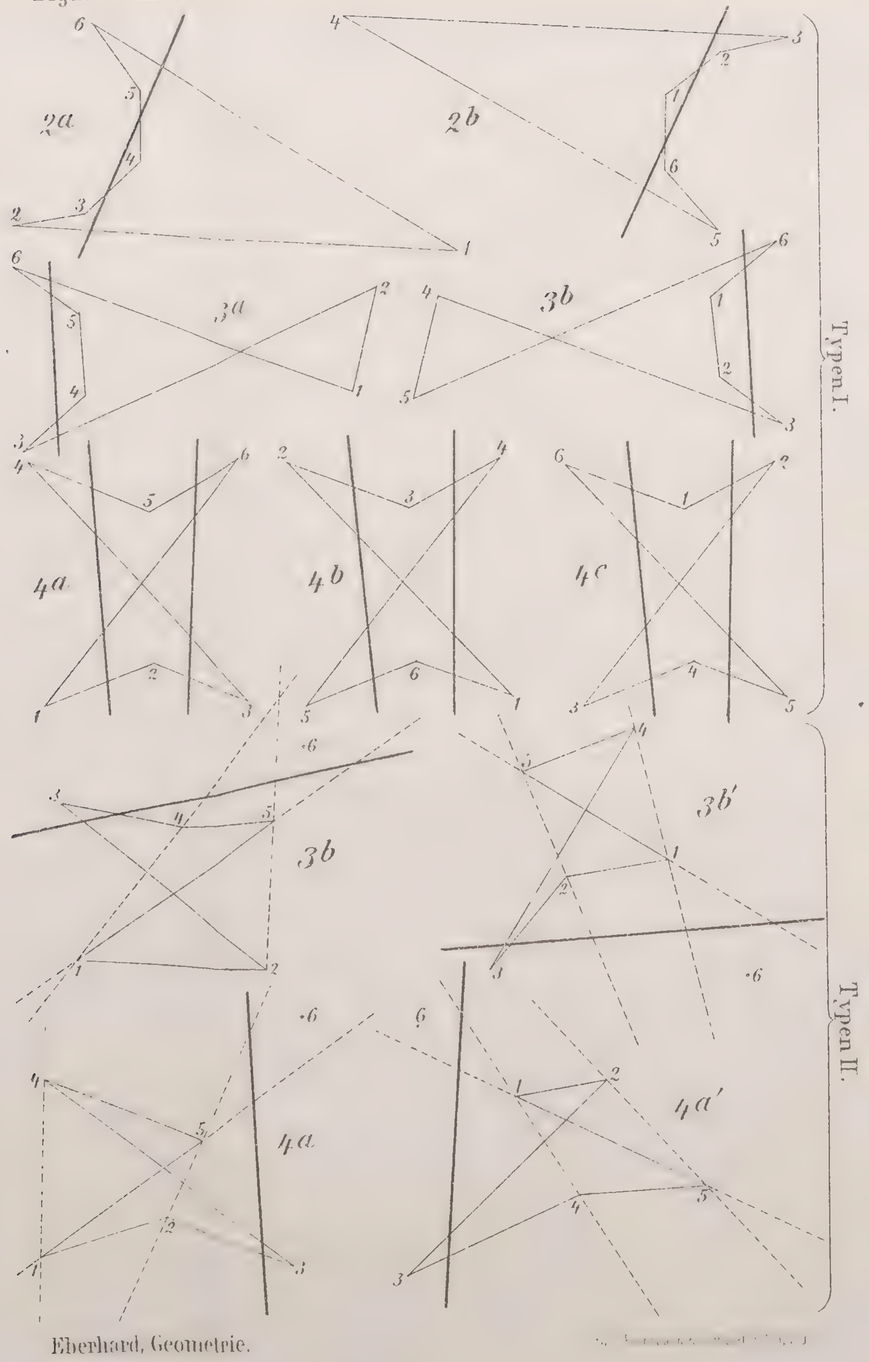
Tafel III.



Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

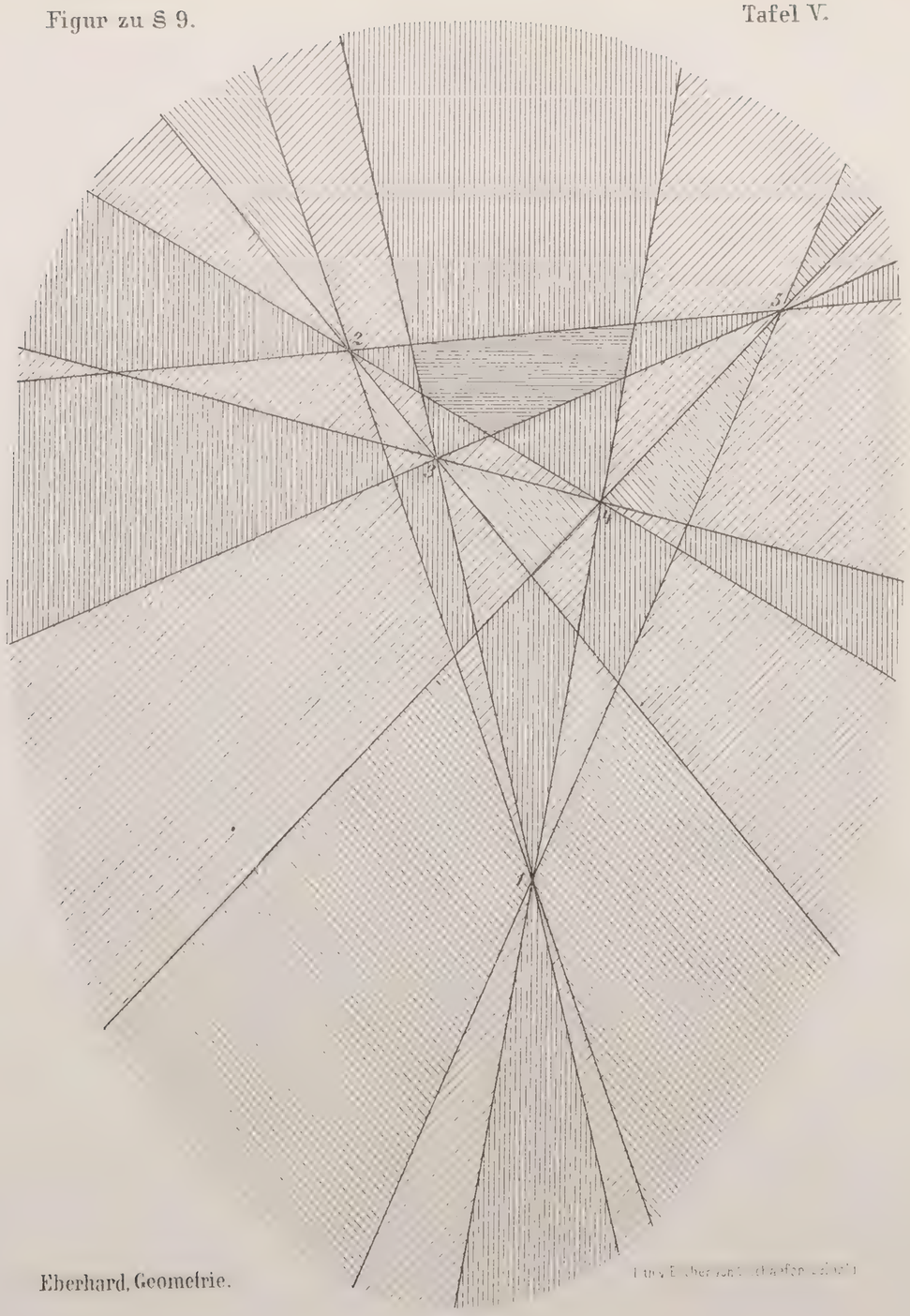
Figuren zu § 9.

Tafel IV.



Figur zu § 9.

Tafel V.



Bayerische
Staats-
Bibliothek
München

Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren: Jakob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. In 3 Bänden. I. Band. I. Theil. Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse. Mit einem Bilde Grassmanns in Holzschnitt und 35 Figuren im Text. [XII u. 435 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 12.—

Heffter, Dr. **Lothar,** a. o. Professor an der Universität Giessen, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen. [XIV u. 258 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 6.—

Henke, Prof. Dr. **Richard,** Oberlehrer am Annen-Realgymnasium zu Dresden, über die Methode der kleinsten Quadrate. Zweite, unveränderte Auflage. Nebst Zusätzen. [V u. 77 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 2.—

Herz, Dr. **Norbert,** Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen. In 3 Theilen. II. Theil: die empirischen Methoden. [VIII u. 264 S. mit 2 Tafeln.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 10.—

Hochheim, Dr. **Adolf,** Professor, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. 3 Hefte, in je 2 Teilen. gr. 8. 1894. geh.
Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. 2. Aufl.
A. Aufgaben. [IV u. 86 S.] n. *M.* 1.60.
B. Auflösungen. [106 S.] n. *M.* 1.60.

Holzmüller, Dr. **Gustav,** Direktor der Gewerbeschule (Realschule mit Fachklassen) zu Hagen i. W., Mitglied der Kais. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher, methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. (Im engsten Anschluß an die Neuen Lehrpläne.) In 3 Teilen. gr. 8. In Leinwand geb.
I. Teil, nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlußprüfung der Vollanstalten reichend. Mit 142 Figuren im Text. [VIII u. 212 S.] 1894. n. *M.* 2.40.
II. Teil, für die drei Oberklassen der höheren Lehranstalten bestimmt. Mit 210 Figuren im Text. [VII u. 273 S.] 1894. n. *M.* 3.—
III. Teil, Ergänzungsheft für Oberrealschulen u. s. w. folgt im März 1895.

Kirchhoff, Gustav, Vorlesungen über mathematische Physik. In vier Bänden. Vierter Band. Vorlesungen über die Theorie der Wärme. Herausgegeben von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Mit 17 Figuren im Text. [X u. 210 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 8.—

Kronecker, Leopold, Vorlesungen über Mathematik. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. In 4 Bänden. I. Band: Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale. Herausgegeben von Dr. Eugen Netto, Prof. der Mathematik an der Universität Giessen. [X u. 346 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 12.—

Muth, Dr. **P.,** Grundlagen für die geometrische Anwendung der Invariantentheorie. Mit einem Begleitworte von M. Pasch. [VI u. 132 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 3.—

Neumann, Franz, Vorlesungen über mathematische Physik, gehalten an der Universität Königsberg. Herausgegeben von seinen Schülern in zwanglosen Heften. VII. Heft: Vorlesungen über die Theorie der Capillarität. Herausgegeben von

Dr. A. Wangerin, Professor der Mathematik an der Universität Halle. Mit Figuren im Text. [X u. 234 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 8.—

Schlesinger, Prof. Dr. **Ludwig,** Privatdozent an der Universität Berlin, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. [XX u. 486 S.] In 2 Bänden. I. Band. gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 16.—

Schotten, Dr. **Heinrich,** Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. Zweiter Band. [IV u. 410 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 8.—

Veronese, Giuseppe, Professor an der Königl. Universität zu Padua, Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von Adolf Schepp, Premierlieutenant a. D. zu Wiesbaden. (Mit zahlreichen Figuren im Text.) [XLVII u. 710 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 20.—

Wislicenus, Dr. **Walter, F.,** a. o. Professor an der Universität Strafsburg, astronomische Chronologie. Ein Hülfsbuch für Historiker, Archäologen und Astronomen. [X u. 163 S.] gr. 8. 1895. In Lnw. geb. n. *M.* 5.—

Wüllner, Adolph, Lehrbuch der Experimentalphysik. 4 Bände. Erster Band. Allgemeine Physik und Akustik. Fünfte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit 321 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [X u. 1000 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 12.—

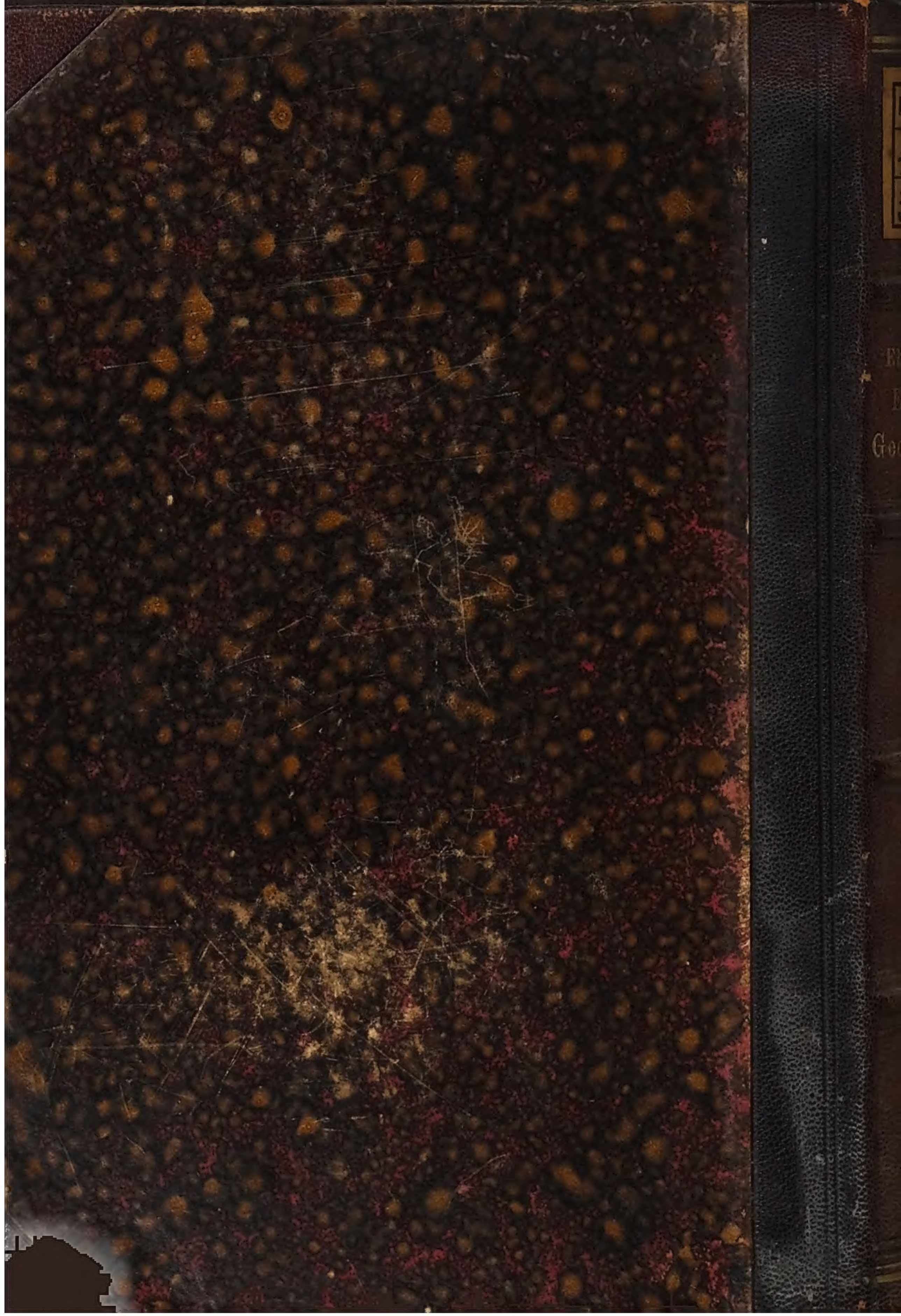
Mathematische Annalen. Begründet 1868 durch Alfred Clebsch und Carl Neumann. Unter Mitwirkung der Herren Paul Gordan, Carl Neumann, Max Noether, Karl VonderMühl, Heinrich Weber gegenwärtig herausgeg. von Felix Klein in Göttingen, Walther Dyck in München, Adolph Mayer in Leipzig. 46. Band. 1895. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. *M.* 20.—

Revue semestrielle des Publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute (Groningen), D. J. Korteweg (Amsterdam), J. C. Kluyver (Leyden), W. Kapteyn (Utrecht), P. Zeeman (Delft). gr. 8. III. Jahrg. 1895. Preis für den Jahrgang von 2 Heften zu je etwa 9 Bogen n. *M.* 7.—

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Herausgegeben unter der verantwortlichen Redaction von Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl und Dr. M. Cantor. 40. Jahrgang. 1895. gr. 8. Preis für den Jahrgang von 6 Heften n. *M.* 18.—

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen. (Zugleich Organ der Sektionen für math. und naturw. Unterricht in den Versammlungen der Philologen, Naturforscher, Seminar- und Volksschullehrer, sowie auch des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und in den Naturwissenschaften.) Herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. 26. Jahrgang. 1895. gr. 8. Preis für den Jahrgang von 8 Heften n. *M.* 12.—

Josef Schaffenbeck
Buchbinderei
München



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Eberhard, Victor,

Die Grundgebilde der ebenen Geometrie

Bd.: 1

1895

Math.p. 114 xd-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650841-4